

全国高中数学联赛模拟试题（一）

（命题人：吴伟朝）

第一试

一、选择题：（每小题 6 分，共 36 分）

1、方程 $6 \times (5a^2 + b^2) = 5c^2$ 满足 $c \leq 20$ 的正整数解 (a, b, c) 的个数是

(A) 1 (B) 3 (C) 4 (D) 5

2、函数 $y = \frac{x^2}{x-1}$ ($x \in \mathbf{R}, x \neq 1$) 的递增区间是

(A) $x \geq 2$ (B) $x \leq 0$ 或 $x \geq 2$ (C) $x \leq 0$ (D) $x \leq 1 - \sqrt{2}$ 或 $x \geq \sqrt{2}$

3、过定点 $P(2, 1)$ 作直线 l 分别交 x 轴正向和 y 轴正向于 A, B , 使 $\triangle AOB$ (O 为原点) 的面积最小, 则 l 的方程为

(A) $x + y - 3 = 0$ (B) $x + 3y - 5 = 0$ (C) $2x + y - 5 = 0$ (D) $x + 2y - 4 = 0$

4、方程 $\cos 2x + \sqrt{3} \sin 2x = a + 1$ 在 $[0, \frac{\pi}{2}]$ 上有两个不同的实数解 x , 则参数 a 的取值范围是

(A) $0 \leq a < 1$ (B) $-3 \leq a < 1$ (C) $a < 1$ (D) $0 < a < 1$

5、数列 $1, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 5, 5, 5, 5, 6, \dots$ 的第 1000 项是

(A) 42 (B) 45 (C) 48 (D) 51

6、在 $1, 2, 3, 4, 5$ 的排列 a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 中, 满足条件 $a_1 < a_2, a_2 > a_3, a_3 < a_4, a_4 > a_5$ 的排列的个数是

(A) 8 (B) 10 (C) 14 (D) 16

二、填空题：（每小题 9 分，共 54 分）

1、 $[x]$ 表示不大于 x 的最大整数, 则方程 $\frac{1}{2} \times [x^2 + x] = 19x + 99$ 的实数解 x 是_____.

2、设 $a_1 = 1, a_{n+1} = 2a_n + n^2$, 则通项公式 $a_n =$ _____.

3、数 7^{99} 被 2550 除所得的余数是_____.

4、在 $\triangle ABC$ 中, $\angle A = \frac{\pi}{3}, \sin B = \frac{5}{13}$, 则 $\cos C =$ _____.

5、设 k, θ 是实数, 使得关于 x 的方程 $x^2 - (2k+1)x + k^2 - 1 = 0$ 的两个根为 $\sin \theta$ 和 $\cos \theta$, 则 θ 的取值范围是_____.

6、数 $(5 + \sqrt{24})^{2n}$ ($n \in \mathbf{N}$) 的个位数字是_____.

三、(20 分)

已知 x, y, z 都是非负实数, 且 $x + y + z = 1$.

求证: $x(1-2x)(1-3x) + y(1-2y)(1-3y) + z(1-2z)(1-3z) \geq 0$, 并确定等号成立的条件.

四、(20 分)

(1) 求出所有的实数 a , 使得关于 x 的方程 $x^2 + (a+2002)x + a = 0$ 的两根皆为整数.

(2) 求出所有的实数 a , 使得关于 x 的方程 $x^3 + (-a^2 + 2a + 2)x - 2a^2 - 2a = 0$ 有三个整数根.

五、(20 分)

试求正数 r 的最大值, 使得点集 $T = \{(x, y) | x, y \in \mathbf{R}, \text{且 } x^2 + (y-7)^2 \leq r^2\}$ 一定被包含于另一个点集 $S = \{(x, y) | x, y \in \mathbf{R}, \text{且对任何 } \theta \in \mathbf{R}, \text{都有 } \cos 2\theta + x \cos \theta + y \geq 0\}$ 之中.

第二试

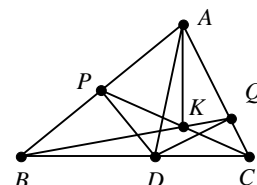
一、(50分)

设 $a, b, c \in \mathbf{R}$, $b \neq ac$, $a \neq -c$, z 是复数, 且 $z^2 - (a-c)z - b = 0$.

求证: $\left| \frac{a^2 + b - (a+c)z}{ac-b} \right| = 1$ 的充分必要条件是 $(a-c)^2 + 4b \leq 0$.

二、(50分)

如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle ABC$ 和 $\angle ACB$ 均是锐角, D 是 BC 边上的内点, 且 AD 平分 $\angle BAC$, 过点 D 分别向两条直线 AB, AC 作垂线 DP, DQ , 其垂足是 P, Q , 两条直线 CP 与 BQ 相交于点 K . 求证:



(1) $AK \perp BC$;

(2) $AK < AP = AQ < \frac{2S_{\triangle ABC}}{BC}$, 其中 $S_{\triangle ABC}$ 表示 $\triangle ABC$ 的面积.

三、(50分)

给定一个正整数 n , 设 n 个实数 a_1, a_2, \dots, a_n 满足下列 n 个方程:

$$\sum_{i=1}^n \frac{a_i}{i+j} = \frac{4}{2j+1} \quad (j=1, 2, 3, \dots, n).$$

确定和式 $S = \sum_{i=1}^n \frac{a_i}{2i+1}$ 的值 (写成关于 n 的最简式子).

参考答案

第一试

一、选择题:

1、C; 2、C; 3、D; 4、A; 5、B; 6、D

二、填空题:

1、 $-\frac{181}{38}$ 或 $\frac{1587}{38}$; 2、 $7 \times 2^{n-1} - n^2 - 2n - 3$;

3、343; 4、 $\frac{5\sqrt{3}-12}{26}$;

5、 $\{\theta | \theta = 2n\pi + \pi \text{ 或 } 2n\pi - \frac{\pi}{2}, n \in \mathbf{Z}\}$; 6、1 (n 为偶数); 7 (n 为奇数).

三、证略, 等号成立的条件是 $x = y = z = \frac{1}{3}$ 或 $\begin{cases} x = y = \frac{1}{2} \\ z = 0 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x = z = \frac{1}{2} \\ y = 0 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} y = z = \frac{1}{2} \\ x = 0 \end{cases}$.

四、(1) a 的可能取值有 0, -1336, -1936, -1960, -2664, -4000, -2040; (2) a 的可能取值有 -3, 11, -1, 9.

五、 $r_{\max} = 4\sqrt{2}$.

第二试

一、证略 (提示: 直接解出 $z = \frac{a-c \pm \sqrt{-(a-c)^2 - 4b \cdot i}}{2}$, 通过变形即得充分性成立, 然后

利用反证法证明必要性).

二、证略 (提示: 用同一法, 作出 BC 边上的高 AR , 利用塞瓦定理证明 AR 、 BQ 、 CP 三线共点, 从而 $AK \perp BC$; 记 AR 与 PQ 交于点 T , 则 $\frac{2S_{\triangle ABC}}{BC} = AR > AT > AQ = AP$, 对于 $AK < AP$, 可证 $\angle APK < \angle AKP$).

三、 $S = -\frac{1}{(2n+1)^2} + 1$.