全国高中数学联赛模拟试题（二）

（命题人：江厚利）

第一试

一、选择题（每小题 6 分，共 36 分）

1、已知集合 $A=\left\{(x,y)\left|\frac{y-3}{x-2}=a+1\right.\right\}$，$B=\left\{(x,y)\left|\left(a^2-1\right)x+(a-1)y=15\right.\right\}$．若 $A\cap B=\varnothing$，则 a 的所有取值是

（A）－1，1　（B）－1，$\frac{1}{2}$　（C）±1，2　（D）±1，－4，$\frac{5}{2}$

2、如图 1，已知正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$，点 M、N 分别在 AB_1、BC_1 上，且 $AM=BN$．那么，①$AA_1\perp MN$；②$A_1C_1/\!/MN$；③$MN/\!/$平面 $A_1B_1C_1D_1$；④MN 与 A_1C_1 异面．

以上 4 个结论中，不正确的结论的个数为

（A）1　（B）2　（C）3　（D）4

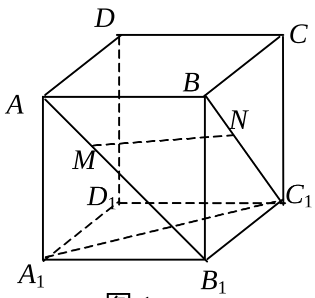

图 1

3、用 S_n 与 a_n 分别表示区间 $[0,1)$ 内不含数字 9 的 n 位小数的和与个数．则 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{S_n}$ 的值为

（A）$\frac{3}{4}$　（B）$\frac{5}{4}$　（C）$\frac{7}{4}$　（D）$\frac{9}{4}$

4、首位数字是 1，且恰有两个数字相同的四位数共有

（A）216 个　（B）252 个　（C）324 个　（D）432 个

5、对一切实数 x，所有的二次函数 $f(x)=ax^2+bx+c$（$a<b$）的值均为非负实数．则 $\frac{b-a}{a+b+c}$ 的最大值是

（A）$\frac{1}{3}$　（B）$\frac{1}{2}$　（C）3　（D）2

6、曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ 的一个焦点为 F_1，顶点为 A_1、A_2，P 是双曲线上任意一点．则分别以线段 PF_1、A_1A_2 为直径的两圆一定

（A）相交　（B）相切　（C）相离　（D）以上情况均有可能

二、填空题（每小题 9 分，共 54 分）

1、已知复数 $z_1=2+\mathrm{i}$，$2z_2=\frac{z_1+\mathrm{i}}{(2\mathrm{i}+1)-z_1}$．若△$ABC$ 的 3 个内角∠A、∠B、∠C 依次成等差数列，且 $u=\cos A+2\mathrm{i}\cos^2\frac{C}{2}$，则 $\left|u+z_2\right|$ 的取值范围是_____．

2、点 $P(a,b)$在第一象限内，过点 P 作一直线 l，分别交 x、y 轴的正半轴于 A、B 两点．那么，PA^2+PB^2 取最小值时，直线 l 的斜率为_____．

3、若△ABC 是钝角三角形，则 arccos(sin$A$)＋arccos(sin$B$)＋arccos(sin$C$)的取值范围是_____．

4、在正四面体 $ABCD$ 中，点 M、P 分别是 AD、CD 的中点，点 N、Q 分别是△BCD、△ABC 的中心．则直线 MN 于 PQ 的夹角的余弦值为_____．

5、在 $(\sqrt{x}+2)^{2n+1}$ 的展开式中，x 的幂指数是整数的各项系数之和是_____．

6、集合 A、B、C（不必两两相异）的并集 $A\cup B\cup C=\{1,2,3,\cdots,n\}$．则满足条件的三元有序集合组$(A,B,C)$的个数是_____．

三、（20 分）

设 $p>0$，当 p 变化时，C_p：$y^2=2px$ 为一族抛物线，直线 l 过原点且交 C_p 于原点和点 A_p．又 M 为 x 轴上异于原点的任意点，直线 MA_p 交 C_p 于点 A_p 和 B_p．求证：所有的点 B_p 在同一条直线上．

四、（20 分）

对于公差为 $d(d\neq0)$的等差数列$\{a_n\}$，求证：数列中不同两项之和仍是这一数列中的一项的充要条件是存在整数 $m\geqslant-1$，使 $a_1=md$．

五、（20 分）

求最大的正数λ，使得对任意实数 a、b，均有

$$\lambda a^2b^2\left(a+b\right)^2\leqslant\left(a^2+ab+b^2\right)^3.$$

第二试

一、（50 分）

如图 2，$\odot O$ 切$\triangle ABC$ 的边 AB 于点 D，切边 AC 于点 C，M 是边 BC 上一点，AM 交 CD 于点 N．求证：M 是 BC 中点的充要条件是 $ON\perp BC$．

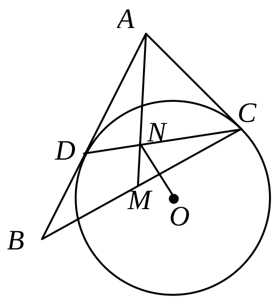

图 2

二、（50 分）

求出能表示为 $n=\dfrac{(a+b+c)^2}{abc}$（a、b、$c\in\mathbf{Z}_+$）的所有正整数 n．

三、（50 分）

在一个$\left(2^n-1\right)\times\left(2^n-1\right)$（$n\geqslant 2$）的方格表的每个方格内填入 1 或－1，如果任意一格内的数都等于与它有公共边的那些方格内所填数的乘积，则称这种填法是“成功”的．求“成功”填法的总数

参考答案

第一试

一、选择题：

1、D；2、B；3、D；4、D；5、A；6、B

二、填空题：

1、$[\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{5}}{2})$；　2、$-\frac{\sqrt{ab}}{a}$；3、$(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2})$；4、$\frac{1}{18}$；5、$\frac{3^{2n+1}+1}{2}$；　6、$7^n$.

三、证略.

四、证略.

五、$\lambda_{\max}=\frac{27}{4}$.

第二试

一、证略；

二、1,2,3,4,5,6,8,9.

三、1 种（每空填 1）.