全国高中数学联赛模拟试题（三）

（命题人：吴伟朝）

第一试

一、选择题：（每小题 6 分，共 36 分）

1、若集合 $S=\{n\mid n$ 是整数，且 $22n+2$ 整除 $2003n+2004\}$，则 S 为

（A）空集 （B）单元集 （C）二元集 （D）无穷集

2、若多项式 x^2-x+1 能除尽另一个多项式 x^3+x^2+ax+b（a、b 皆为常数）. 则 $a+b$ 等于

（A）0 （B）-1 （C）1 （D）2

3、设 a 是整数，关于 x 的方程 $x^2+(a-3)x+a^2=0$ 的两个实根为 x_1、x_2，且 $\tan(\arctan x_1+\arctan x_2)$ 也是整数. 则这样的 a 的个数是

（A）0 （B）1 （C）2 （D）4

4、一个四面体的体积为 V_1，它的各条棱的中点构成一个凸多面体，其体积为 V_2. 则 $\dfrac{V_2}{V_1}$ 为

（A）$\dfrac{1}{2}$ （B）$\dfrac{2}{3}$ （C）常数，但不等于 $\dfrac{1}{2}$ 和 $\dfrac{2}{3}$ （D）不确定

5、十进制中，若一个至少有两位数字的正整数除了最左边的数字外，其余各个数字都小于其左边的数字时，则称它为递降正整数. 所有这样的递降正整数的个数为

（A）1001 （B）1010 （C）1011 （D）1013

6、在正方体的 8 个顶点中，能构成一个直角三角形的 3 个顶点的直角三点组的个数是

（A）36 （B）37 （C）48 （D）49

二、填空题：（每小题 9 分，共 54 分）

1、若直线 $x\cos\theta+y\sin\theta=\cos^2\theta-\sin^2\theta$（$0<\theta<\pi$）与圆 $x^2+y^2=\dfrac{1}{4}$ 有公共点，则 θ 的取值范围是_____.

2、平面直角坐标系 xOy 中，一个圆经过 $(0,2)$、$(3,1)$，且与 x 轴相切. 此圆的半径等于_____.

3、常数 a 使得关于 x 的方程 $\lg(x^2+20x)-\lg(8x-6a-3)=0$ 有惟一解. 则 a 的取值范围是_____.

4、$f(x)=\dfrac{x^2}{8}+x\cos x+\cos(2x)$ $(x\in\mathbf{R})$ 的最小值是_____.

5、若 k 是一个正整数，且 2^k 整除 $C_{4006}^{0}+C_{4006}^{2}3^1+\cdots+C_{4006}^{2i}3^i+\cdots+C_{4006}^{4006}3^{2003}$，则 k 的最大值为_____.

6、设 $ABCD$ 为凸四边形，$AB=7$，$BC=4$，$CD=5$，$DA=6$，其面积 S 的取值范围是 (a,b). 则 $a+b=$_____.

三、（20 分）

设椭圆的左右焦点分别为 F_1、F_2，左准线为 l，点 P 在椭圆上．作 $PQ\perp l$，Q 为垂足．试问：对于什么样的椭圆，才存在这样的点 P，使得 PQF_1F_2 为平行四边形？说明理由（答案用关于离心率 e 的等式或不等式来表示）.

四、（20 分）

设 $a_0=1$，$a_1=2$，$a_{n+1}=2a_{n-1}+n$，$n=1,2,3,\cdots$．试求出 a_n 的表达式（答案用有限个关于 n 的式子相加的形式表示，且项数与 n 无关）.

五、（20 分）

试求出所有的有序整数对$(a，b)$，使得关于 x 的方程 $x^4+(2b-a^2)x^2-2ax+b^2-1=0$ 的各个根均是整数.

第二试

一、（50 分）

点 P 在△ABC 内，且∠BAP＝∠CAP，连结 BP 并延长交 AC 于点 Q．设∠BAC＝60°，且

$$\frac{1}{BP}+\frac{1}{PC}=\frac{1}{PQ}.$$

求证：P 是△ABC 的内心.

二、（50 分）

设正数 a、b 满足 $a>\frac{b}{\sqrt{2}}$ 且使得关于 x 的不等式 $\sqrt{x-1}\geqslant a\sqrt{x+1}-b$ 总有实数解. 试求 $f(a,b)$ ＝$a^2-3ab+b^2$ 的取值范围.

三、（50 分）

试求出正整数 k 的最小可能值，使得下述命题成立：对于任意的 k 个整数 $a_1,a_2,\cdots,a_k$（允许相等），必定存在相应的 k 的整数 $x_1,x_2,\cdots,x_k$（也允许相等），且$|x_i|\leqslant 2(i=1,2,\cdots,k)$，$|x_1|+|x_2|+\cdots+|x_k|\neq 0$，使得 2003 整除 $x_1a_1+x_2a_2+\cdots+x_ka_k$.

参考答案

第一试

一、选择题：

1、C；2、C；3、B；4、A；5、D；6、C

二、填空题：

1、$[\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3}]\cup[\frac{2\pi}{3},\frac{5\pi}{6}]$；　　2、$15\pm6\sqrt{5}$；3、$(-\frac{163}{6},-\frac{1}{2})$；4、－1；5、2004；　6、$2\sqrt{210}$．

三、$e\in(\frac{1}{2},1)$．

四、$a_{2n}=2^{n+2}-2n-3$；$a_{2n+1}=3\times2^{n+1}-2n-4$.

五、$(a,b)=(2l-1,l^2-l-1)\quad(\forall l\in\mathbf{Z})$

第二试

一、证略（提示：将条件变形为$\frac{PC}{PA}\cdot\frac{PA}{PB}+1=\frac{PC}{PQ}$，然后应用正弦定理，进行三角变换，得$\angle BPC=120^\circ$，利用同一法即证）；

二、$(-\infty,-1)$.

三、$k_{\min}=7$.