

全国高中数学联赛模拟试题（五）

（命题人：罗增儒）

第一试

一、选择题：（每小题6分，共36分）

1、空间中 n ($n \geq 3$) 个平面，其中任意三个平面无公垂面。那么，下面四个结论

- (1) 没有任何两个平面互相平行；
- (2) 没有任何三个平面相交于一条直线；
- (3) 平面间的任意两条交线都不平行；
- (4) 平面间的每一条交线均与 $n-2$ 个平面相交。

其中，正确的个数为

- (A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4

2、若函数 $y=f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的一段图像可以近似地看作直线段，则当 $c \in (a,b)$ 时， $f(c)$ 的近似值可表示为

- (A) $\frac{f(a)+f(b)}{2}$ (B) $f\left(\frac{a+b}{2}\right)$
(C) $\frac{(b-c)f(a)+(c-a)f(b)}{(b-a)}$ (D) $f(a) - \frac{c-a}{b-a}[f(b)-f(a)]$

3、设 $a > b > c$, $a+b+c=1$, 且 $a^2+b^2+c^2=1$, 则

- (A) $a+b > 1$ (B) $a+b=1$ (C) $a+b < 1$ (D) 不能确定，与 a, b 的具体取值有关

4、设椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 的离心率 $e = \frac{\sqrt{3}}{2}$, 已知点 $P\left(0, \frac{3}{2}\right)$ 到椭圆上的点的最远距离是 $\frac{7}{4}$, 则

短半轴之长 $b =$

- (A) $\frac{1}{16}$ (B) $\frac{1}{8}$ (C) $\frac{1}{4}$ (D) $\frac{1}{2}$

5、 $S = \{1, 2, \dots, 2003\}$, A 是 S 的三元子集，满足： A 中的所有元素可以组成等差数列。那么，这样的三元子集 A 的个数是

- (A) C_{2003}^3 (B) $C_{1001}^2 + C_{1002}^2$ (C) $A_{1001}^2 + A_{1002}^2$ (D) A_{2003}^3

6、长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$, AC_1 为体对角线。现以 A 为球心， AB, AD, AA_1, AC_1 为半径作四个同心球，其体积依次为 V_1, V_2, V_3, V_4 , 则有

- (A) $V_4 < V_1 + V_2 + V_3$ (B) $V_4 = V_1 + V_2 + V_3$
(C) $V_4 > V_1 + V_2 + V_3$ (D) 不能确定，与长方体的棱长有关

二、填空题：（每小题9分，共54分）

1、已知 $\frac{\sin^3 \alpha}{\sin \beta} = \frac{\cos^3 \alpha}{\cos \beta} = k$, 则 k 的取值范围为_____。

2、等差数列 $\{a_n\}$ 的首项 $a_1 = 8$, 且存在惟一的 k 使得点 (k, a_k) 在圆 $x^2 + y^2 = 10^2$ 上, 则这样的等差数列共有_____个。

3、在四面体 $P-ABC$ 中, $PA=PB=a$, $PC=AB=BC=CA=b$, 且 $a < b$, 则 $\frac{a}{b}$ 的取值范围为_____.

4、动点 A 对应的复数为 $z=4(\cos\theta+i\sin\theta)$, 定点 B 对应的复数为 2 , 点 C 为线段 AB 的中点, 过点 C 作 AB 的垂线交 OA 与 D , 则 D 所在的轨迹方程为_____.

5、 $\sum_{k=1}^{2003} 3^k$ 被 8 所除得的余数为_____.

6、圆周上有 100 个等分点, 以这些点为顶点组成的钝角三角形的个数为_____.

三、(20分)

已知抛物线 $y^2=2px(p>0)$ 的一条长为 l 的弦 AB . 求 AB 中点 M 到 y 轴的最短距离, 并求出此时点 M 的坐标.

四、(20分)

单位正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, 正方形 $ABCD$ 的中心为点 M , 正方形 $A_1B_1C_1D_1$ 的中心为点 N , 连 AN 、 B_1M .

(1) 求证: AN 、 B_1M 为异面直线;

(2) 求出 AN 与 B_1M 的夹角.

五、(20分)

对正实数 a 、 b 、 c . 求证:

$$\frac{\sqrt{a^2+8bc}}{a} + \frac{\sqrt{b^2+8ac}}{b} + \frac{\sqrt{c^2+8ab}}{c} \geq 9.$$

第二试

一、(50分)

设 $ABCD$ 是面积为 2 的长方形, P 为边 CD 上的一点, Q 为 $\triangle PAB$ 的内切圆与边 AB 的切点. 乘积 $PA \cdot PB$ 的值随着长方形 $ABCD$ 及点 P 的变化而变化, 当 $PA \cdot PB$ 取最小值时,

- (1) 证明: $AB \geq 2BC$;
- (2) 求 $AQ \cdot BQ$ 的值.

二、(50分)

给定由正整数组成的数列

$$\begin{cases} a_1 = 1, a_2 = 2 \\ a_{n+2} = a_{n+1} + a_n \end{cases} \quad (n \geq 1).$$

(1) 求证: 数列相邻项组成的无穷个整点 $(a_1, a_2), (a_3, a_4), \dots, (a_{2k-1}, a_{2k}), \dots$ 均在曲线 $x^2 + xy - y^2 + 1 = 0$ 上.

(2) 若设 $f(x) = x^n + x^{n-1} - a_n x - a_{n-1}$, $g(x) = x^2 - x - 1$, 证明: $g(x)$ 整除 $f(x)$.

三、(50分)

我们称 A_1, A_2, \dots, A_n 为集合 A 的一个 n 分划, 如果

- (1) $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n = A$;
- (2) $A_i \cap A_j = \emptyset, 1 \leq i < j \leq n$.

求最小正整数 m , 使得对 $A = \{1, 2, \dots, m\}$ 的任意一个 13 分划 A_1, A_2, \dots, A_{13} , 一定存在某个集合 $A_i (1 \leq i \leq 13)$, 在 A_i 中有两个元素 a, b 满足 $b < a \leq \frac{9}{8}b$.

参考答案

第一试

一、选择题:

1、D; 2、C; 3、A; 4、C; 5、B; 6、C

二、填空题:

1、 $\left(-1, -\frac{1}{2}\right] \cup \left[\frac{1}{2}, 1\right)$; 2、17; 3、 $(\sqrt{2-\sqrt{3}}, 1)$; 4、 $\frac{(x-1)^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$; 5、4; 6、117600.

$$\text{三、} \begin{cases} \left(\frac{l^2}{8p}, 0 < l < 2p, M\left(\frac{l^2}{8p}, 0\right)\right) \\ \left(\frac{l-p}{2}, l \geq 2p, M\left(\frac{l-p}{2}, \sqrt{\frac{pl}{2} - p^2}\right)\right) \end{cases}$$

四、(1) 证略; (2) $\arccos \frac{2}{3}$.

五、证略.

第二试

一、(1) 证略 (提示: 用面积法, 得 $PA \cdot PB$ 最小值为 2, 此时 $\angle APB = 90^\circ$);

(2) $AQ \cdot BQ = 1$.

二、证略 (提示: 用数学归纳法).

三、 $m = 117$.