全国高中数学联赛模拟试题（六）

（命题人：秦永 苟春鹏）

第一试

一、选择题：（每小题 6 分，共 36 分）

1、在复平面上，非零复数 z_1、z_2 在以 i 对应的点为圆心，1 为半径的圆上，$\overline{z_1}\cdot z_2$ 的实部为零，$\arg z_1=\frac{\pi}{6}$，则 z_2=

（A）$-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{3}{2}\mathrm{i}$ （B）$\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{3}{2}\mathrm{i}$ （C）$-\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$ （D）$\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$

2、已知函数 $f(x)=\log_a(ax^2-x+\frac{1}{2})$ 在[1,2]上恒正，则实数 a 的取值范围是

（A）$(\frac{1}{2},\frac{5}{8})$ （B）$(\frac{3}{2},+\infty)$ （C）$(\frac{1}{2},\frac{5}{8})\cup(\frac{3}{2},+\infty)$ （D）$(\frac{1}{2},+\infty)$

3、已知双曲线过点 $M(-2，4)$，$N(4，4)$，它的一个焦点为 $F_1(1，0)$，则另一个焦点 F_2 的轨迹方程是

（A）$\frac{(x-1)^2}{25}+\frac{(y-4)^2}{16}=1$（$y\neq0$）或 $x=1$（$y\neq0$）

（B）$\frac{(x-1)^2}{16}+\frac{(y-4)^2}{25}=1$（$x\neq0$）或 $x=1$（$y\neq0$）

（C）$\frac{(x-4)^2}{25}+\frac{(y-1)^2}{16}=1$（$y\neq0$）或 $y=1$（$x\neq0$）

（D）$\frac{(x-4)^2}{16}+\frac{(y-1)^2}{25}=1$（$x\neq0$）或 $y=1$（$x\neq0$）

4、已知正实数 a、b 满足 $a+b=1$，则 $M=\sqrt{1+a^2}+\sqrt{1+2b}$ 的整数部分是

（A）1 （B）2 （C）3 （D）4

5、一条笔直的大街宽是 40 米，一条人行道穿过这条大街，并与大街成某一角度，人行道的宽度是 15 米，长度是 50 米，则人行道间的距离是

（A）9 米 （B）10 米 （C）12 米 （D）15 米

6、一条铁路原有 m 个车站，为适应客运需要新增加 n 个车站（$n>1$），则客运车票增加了 58 种（注：从甲站到乙站需要两种不同的车票），那么原有车站的个数是

（A）12 （B）13 （C）14 （D）15

二、填空题：（每小题 6 分，共 36 分）

7、长方形 $ABCD$ 的长 AB 是宽 BC 的 $2\sqrt{3}$ 倍，把它折成无底的正三棱柱，使 AD 与 BC 重合折痕线 EF、GH 分别交原对角线 AC 于 M、N，则折后截面 AMN 与底面 AFH 所成的角是_____.

8、在△ABC 中，a、b、c 是角 A、B、C 的对边，且满足 $a^2+b^2=2c^2$，则角 C 的最大值是_____.

9、从盛满 a 升（$a>1$）纯酒精的容器里倒出 1 升，然后填满水，再倒出 1 升混合溶液后又用水填满，如此继续下去．则第 n 次操作后溶液的浓度是_____.

10、已知函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的定义域均为非负实数集，对任意 $x\geqslant 0$，规定 $f(x)^{\star}g(x)=\min\{f(x),g(x)\}$．若 $f(x)=3-x$，$g(x)=\sqrt{2x+5}$，则 $f(x)^{\star}g(x)$的最大值为_____.

11、从 1 到 100 的自然数中，每次取出不同的两个数，使它们的和大于 100，则可有_____不同的取法.

12、若实数 $a>0$，则满足 $a^5-a^3+a=2$ 的 a 值属于区间：①$(0,\sqrt[6]{3})$；②$(\sqrt[6]{2},\sqrt[6]{3})$；③$(\sqrt[6]{3},+\infty)$；④$(0,\sqrt[3]{2})$．其中正确的是_____.

三、（20 分）

求证：经过正方体中心的任一截面的面积不小于正方体的一个侧面的面积

四、（20 分）

直线 $Ax+Bx+C=0$（$A\bullet B\bullet C\neq 0$）与椭圆 $b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$ 相交于 P、Q 两点，O 为坐标原点，且 $OP\perp OQ$．求证：$\dfrac{a^2b^2}{C^2}=\dfrac{a^2+b^2}{A^2+B^2}$.

五、（20 分）

某新建商场建有百货部、服装部和家电部三个经营部，共有 190 名售货员，计划全商场日营业额（指每日卖出商品的总金额）为 60 万元，根据经验，各部商品每 1 万元营业额所需售货员人数如表 1，每 1 万元营业额所得利润如表 2．商场将计划日营业额分配给三个经营部，同时适当安排各部的营业员人数，若商场预计每日的总利润为 c（万元）且满足 $19\leqslant c\leqslant 19.7$，又已知商场分配给经营部的日营业额均为正整数万元，问这个商场怎样分配日营业额给三个部？各部分别安排多少名售货员？

表 1　各部每 1 万元营业额所需人数表

部门	人数
百货部	5
服装部	4
家电部	2

表 2 各部每 1 万元营业额所得利润表

部门	利润
百货部	0.3 万元
服装部	0.5 万元
家电部	0.2 万元

第二试

一、（50 分）

矩形 $ABCD$ 的边 $AD=\lambda\cdot AB$，以 AB 为直径在矩形之外作半圆，在半圆上任取不同于 A、B 的一点 P，连 PC、PD 交 AB 于 E、F，若 $AE^2+BF^2=AB^2$，试求正实数λ的值.

二、（50 分）

若 $a_i\in\mathbf{R}^+$（$i=1,2,\cdots,n$），$S=\sum\limits_{i=1}^{n}a_i$，且 $2\leqslant n\in\mathbf{N}$.

求证：$\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{a_k^3}{S-a_k}\geqslant\frac{1}{n-1}\sum\limits_{k=1}^{n}a_k^2$.

三、（50 分）

无穷数列$\{c_n\}$可由如下法则定义：$c_{n+1}=|1-|1-2c_n||$，而 $0\leqslant c_1\leqslant 1$.

（1）证明：仅当 c_1 是有理数时，数列自某一项开始成为周期数列.

（2）存在多少个不同的 c_1 值，使得数列自某项之后以 T 为周期（对于每个 $T=2,3,\cdots$）？

参考答案

第一试

一、选择题：

1、A；2、C；3、A；4、B；5、C；6、C

二、填空题：

1、$\dfrac{\pi}{6}$；2、$\dfrac{\pi}{3}$；3、$(1-\dfrac{1}{a})^n$； 4、$2\sqrt{3}-1$；5、2500；6、③④.

三、证略.

四、证略.

五、8，23，29 或 10，20，30（万元），对应 40，92，58 或 50，80，60（人）.

第二试

一、$\lambda=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$；

二、证略.

三、（1）证略.

（2）无穷个.