

全国高中数学联赛模拟试题（七）

（选题人：李潜）

第一试

一、选择题：（每小题 6 分，共 36 分）

1、 a 、 b 是异面直线，直线 c 与 a 所成的角等于 c 与 b 所成的角，则这样的直线 c 有

(A) 1 条 (B) 2 条 (C) 3 条 (D) 无数条

2、已知 $f(x)$ 是 \mathbf{R} 上的奇函数， $g(x)$ 是 \mathbf{R} 上的偶函数，若 $f(x)-g(x)=x^2+2x+3$ ，则 $f(x)+g(x)=$

(A) $-x^2+2x-3$ (B) x^2+2x-3 (C) $-x^2-2x+3$ (D) x^2-2x+3

3、知 $\triangle ABC$ ， O 为 $\triangle ABC$ 内一点， $\angle AOB = \angle BOC = \angle COA = \frac{2\pi}{3}$ ，则使 $AB+BC+CA \geq m(AO+BO+CO)$ 成立的 m 的最大值是

(A) 2 (B) $\frac{5}{3}$ (C) $\sqrt{3}$ (D) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

4、设 $x=0.82^{0.5}$ ， $y=\sin 1$ ， $z=\log_3 \sqrt{7}$ 则 x 、 y 、 z 的大小关系是

(A) $x < y < z$ (B) $y < z < x$ (C) $z < x < y$ (D) $z < y < x$

5、整数 $[\frac{10^{1995}}{10^{95}+3}]$ 的末尾两位数字是

(A) 10 (B) 01 (C) 00 (D) 20

6、设 (a,b) 表示两自然数 a 、 b 的最大公约数。设 $(a,b)=1$ ，则 (a^2+b^2, a^3+b^3) 为

(A) 1 (B) 2 (C) 1 或 2 (D) 可能大于 2

二、填空题：（每小题 9 分，共 54 分）

1、若 $f(x)=x^{10}+2x^9-2x^8-2x^7+x^6+3x^2+6x+1$ ，则 $f(\sqrt{2}-1)=$ _____。

2、设 F_1 、 F_2 是双曲线 $x^2-y^2=4$ 的两个焦点， P 是双曲线上任意一点，从 F_1 引 $\angle F_1PF_2$ 平分线的垂线，垂足为 M ，则点 M 的轨迹方程是_____。

3、给定数列 $\{x_n\}$ ， $x_1=1$ ，且 $x_{n+1} = \frac{\sqrt{3}x_n+1}{\sqrt{3}-x_n}$ ，则 $x_{1999}-x_{601}=$ _____。

4、正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 1， E 是 CD 中点， F 是 BB_1 中点，则四面体 AD_1EF 的体积是_____。

5、在坐标平面上，由条件 $\begin{cases} y \geq -|x|-1 \\ y \leq -2|x|+3 \end{cases}$ 所限定的平面区域的面积是_____。

6、12 个朋友每周聚餐一次，每周他们分成三组，每组 4 人，不同组坐不同的桌子。若要求这些朋友中任意两个人至少有一次同坐一张桌子，则至少需要_____周。

三、（20 分）

已知椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 过定点 $A(1,0)$ ，且焦点在 x 轴上，椭圆与曲线 $|y|=x$ 的交点为 B 、 C 。现

有以 A 为焦点，过 B 、 C 且开口向左的抛物线，抛物线的顶点坐标 $M(m,0)$ 。当椭圆的离心率 e 满足 $\frac{2}{3} < e^2 < 1$ ，求实数 m 的取值范围。

四、(20分)

a 、 b 、 c 均为实数， $a \neq b$ ， $b \neq c$ ， $c \neq a$ 。

证明：
$$\frac{3}{2} \leq \frac{|a+b-2c|+|b+c-2a|+|c+a-2b|}{|a-b|+|b-c|+|c-a|} < 2.$$

五、(20分)

已知 $f(x)=ax^4+bx^3+cx^2+dx$ ，满足

- (i) a 、 b 、 c 、 d 均大于 0;
- (ii) 对于任一个 $x \in \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ ， $f(x)$ 为整数;
- (iii) $f(1)=1, f(5)=70$.

试说明，对于每个整数 x ， $f(x)$ 是否为整数。

第二试

一、(50分)

设 K 为 $\triangle ABC$ 的内心, 点 C_1 、 B_1 分别为边 AB 、 AC 的中点, 直线 AC 与 C_1K 交于点 B_2 , 直线 AB 与 B_1K 交于点 C_2 . 若 $\triangle AB_2C_2$ 与 $\triangle ABC$ 的面积相等, 试求 $\angle CAB$.

二、(50分)

设 $w = \cos \frac{\pi}{5} + i \sin \frac{\pi}{5}$, $f(x) = (x-w)(x-w^3)(x-w^7)(x-w^9)$.

求证: $f(x)$ 为一整系数多项式, 且 $f(x)$ 不能分解为两个至少为一次的整系数多项式之积.

三、(50分)

在圆上有 21 个点. 求在以这些点为端点组成的所有的弧中, 不超过 120° 的弧的条数的最小值.

参考答案

第一试

一、选择题:

1、D; 2、A; 3、C; 4、B; 5、C; 6、C

二、填空题:

1、4; 2、 $x^2+y^2=4$; 3、0; 4、 $\frac{5}{24}$; 5、16; 6、5.

三、 $(1, \frac{3+\sqrt{2}}{4})$.

四、证略.

五、是.

第二试

一、 60° ;

二、证略.

三、100.