

全国高中数学联赛模拟试题（八）

（选题人：李潜）

第一试

一、选择题：（每小题 6 分，共 36 分）

1、设 $\log_a b$ 是一个整数，且 $\log_a \frac{1}{b} > \log_a \sqrt{b} > \log_b a^2$ ，给出下列四个结论

① $\frac{1}{b} > \sqrt{b} > a^2$ ；② $\log_a b + \log_b a = 0$ ；③ $0 < a < b < 1$ ；④ $ab - 1 = 0$ 。

其中正确结论的个数是

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4

2、若 $\triangle ABC$ 的三边长 a, b, c 满足 $\begin{cases} a^2 - a - 2b - 2c = 0 \\ a + 2b - 2c + 3 = 0 \end{cases}$ ，则它的最大内角度数是

(A) 150° (B) 120° (C) 90° (D) 60°

3、定长为 l ($l > \frac{2b^2}{a}$) 的线段 AB 的两端点都在双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > 0, b > 0$)，则 AB 中点 M 的横坐标的最小值为

(A) $\frac{al}{2\sqrt{a^2+b^2}}$ (B) $\frac{a+l}{2\sqrt{a^2+b^2}}$ (C) $\frac{a(l-2a)}{2\sqrt{a^2+b^2}}$ (D) $\frac{a(l+2a)}{2\sqrt{a^2+b^2}}$

4、在复平面上，曲线 $z^4 + z = 1$ 与圆 $|z| = 1$ 的交点个数为

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3

5、设 $E = \{(x, y) | 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 2\}$ 、 $F = \{(x, y) | x \leq 10, y \geq 2, y \leq x - 4\}$ 是直角坐标平面上的两个点集，

则集合 $G = \left\{ \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2} \right) \mid (x_1, y_1) \in E, (x_2, y_2) \in F \right\}$ 所组成的图形面积是

(A) 6 (B) 2π (C) 6.5 (D) 7

6、正方形纸片 $ABCD$ ，沿对角线 AC 对折，使 D 在面 ABC 外，这时 DB 与面 ABC 所成的角一定不等于

(A) 30° (B) 45° (C) 60° (D) 90°

二、填空题：（每小题 9 分，共 54 分）

1、已知 $\alpha = \frac{\pi}{24}$ ，则 $\frac{\sin \alpha}{\cos 4\alpha \cos 3\alpha} + \frac{\sin \alpha}{\cos 3\alpha \cos 2\alpha} + \frac{\sin \alpha}{\cos 2\alpha \cos \alpha} + \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$ 的值等于_____。

2、 $1 + \frac{1}{1+2} + \frac{1}{1+2+3} + \cdots + \frac{1}{1+2+3+\cdots+2004} =$ _____。

3、在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $AB = AC$ ，以 C 为一个焦点作一个椭圆，使这个椭圆的另一个焦点在 AB 内，且椭圆过 A, B 点，则这个椭圆的离心率等于_____。

4、 $\{1, 2, 3, \dots, 20\}$ 中选出三个数，使得没有两个数相邻，有_____种不同的选法。

5、 a, b 均为正数，且存在复数 z 满足 $\begin{cases} z + \bar{z} \cdot |z| = a + bi \\ |z| \leq 1 \end{cases}$ ，则 ab 的最大值等于_____。

6、使不等式 $\frac{8}{15} < \frac{n}{n+k} < \frac{7}{13}$ 对唯一的一个整数 k 成立的最大正整数 n 为_____.

三、(20分)

已知实数 x, y 满足 $x^2+y^2 \leq 5$. 求 $f(x,y)=3|x+y|+|4y+9|+|7y-3x-18|$ 的最大值与最小值.

四、(20分)

经过点 $M(2,-1)$ 作抛物线 $y^2=x$ 的四条弦 $P_iQ_i(i=1,2,3,4)$, 且 P_1, P_2, P_3, P_4 四点的纵坐标依次成等差数列.

求证: $\frac{P_1M}{MQ_1} - \frac{P_2M}{MQ_2} > \frac{P_3M}{MQ_3} - \frac{P_4M}{MQ_4}$.

五、(20分)

n 为正整数, $r > 0$ 为实数. 证明: 方程 $x^{n+1}+rx^n-r^{n+1}=0$ 没有模为 r 的复数根.

第二试

一、(50分)

设 $C(I)$ 是以 $\triangle ABC$ 的内心 I 为圆心的一个圆, 点 D 、 E 、 F 分别是从小 I 出发垂直于边 BC 、 CA 和 AB 的直线 $C(I)$ 的交点.

求证: AD 、 BE 和 CF 三线共点.

二、(50分)

非负实数 x 、 y 、 z 满足 $x^2+y^2+z^2=1$.

求证: $1 \leq \frac{x}{1+yz} + \frac{y}{1+zx} + \frac{z}{1+xy} \leq \sqrt{2}$.

三、(50分)

对由 n 个 A 、 n 个 B 和 n 个 C 排成的行, 在其下面重新定义一行 (比上面一行少一个字母), 若其头上的两个字母不同, 则在该位置写上第三个字母; 若相同, 则写上该字母. 对新得到的行重复上面的操作, 直到变为一个字母为止. 下面给出了 $n=2$ 的一个例子.

A C B C B A
B A A A C
C A A B
B A C
C B
A

求所有的正整数 n , 使得对任意的初始排列, 经上述操作后, 所得的大三角形的三个顶点上的字母要么全相同, 要么两两不同.

参考答案

第一试

一、选择题:

1、A; 2、B; 3、D; 4、A; 5、D; 6、D

二、填空题:

1、 $\frac{\sqrt{3}}{3}$; 2、 $\frac{4008}{2005}$; 3、 $\sqrt{6}-\sqrt{3}$; 4、816; 5、 $\frac{1}{8}$; 6、112.

三、最大值 $27+6\sqrt{5}$, 最小值 $27-3\sqrt{10}$.

四、证略.

五、证略.

第二试

一、证略;

二、证略.

三、 $n=1$.