

全国高中数学联赛模拟试题（十）

（命题人：杨建忠）

第一试

一、选择题：（每小题 6 分，共 36 分）

1、设集合 $M=\{-2,0,1\}$, $N=\{1,2,3,4,5\}$, 映射 $f: M \rightarrow N$ 使对任意的 $x \in M$, 都有 $x+f(x)+xf(x)$ 是奇数, 则这样的映射 f 的个数是

- (A) 45 (B) 27 (C) 15 (D) 11

2、已知 $\sin 2\theta=a$, $\cos 2\theta=b$, $0 < \theta < \frac{\pi}{4}$, 给出 $\tan\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right)$ 值的五个答案:

① $\frac{b}{1-a}$; ② $\frac{a}{1-b}$; ③ $\frac{1+b}{a}$; ④ $\frac{1+a}{b}$; ⑤ $\frac{a-b+1}{a+b-1}$.

其中正确的是:

- (A) ①②⑤ (B) ②③④ (C) ①④⑤ (D) ③④⑤

3、若干个棱长为 2、3、5 的长方体, 依相同方向拼成棱长为 90 的正方体, 则正方体的一条对角线贯穿的小长方体的个数是

- (A) 64 (B) 66 (C) 68 (D) 70

4、递增数列 1,3,4,9,10,12,13,⋯, 由一些正整数组成, 它们或者是 3 的幂, 或者是若干个 3 的幂之和, 则此数列的第 100 项为

- (A) 729 (B) 972 (C) 243 (D) 981

5、 $C_n^1 + C_n^5 + C_n^9 + \dots + C_n^{4m+1}$ (其中 $m = \left[\frac{n-1}{4}\right]$, $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数) 的值为

- (A) $\sqrt{2^n} \cos \frac{n\pi}{4}$ (B) $\sqrt{2^n} \sin \frac{n\pi}{4}$
 (C) $\frac{1}{2} \left(2^{n-1} + \sqrt{2^n} \cos \frac{n\pi}{4} \right)$ (D) $\frac{1}{2} \left(2^{n-1} + \sqrt{2^n} \sin \frac{n\pi}{4} \right)$

6、一个五位自然数 \overline{abcde} 称为“凸”数, 当且仅当它满足 $a < b < c$, $c > d > e$ (如 12430, 13531 等), 则在所有的五位数中“凸”数的个数是

- (A) 8568 (B) 2142 (C) 2139 (D) 1134

二、填空题：（每小题 9 分，共 54 分）

1、过椭圆 $\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{2} = 1$ 上任意一点 P , 作椭圆的右准线的垂线 PH (H 为垂足), 并延长 PH 到 Q , 使得 $HQ = \lambda PH$ ($\lambda \geq 1$). 当点 P 在椭圆上运动时, 点 Q 的轨迹的离心率的取值范围是 _____.

2、已知异面直线 a 、 b 所成的角为 60° , 过空间一点 P 作与 a 、 b 都成角 α ($0 < \alpha < 90^\circ$) 的直线 l , 则这样的直线 l 的条数是 $f(\alpha) =$ _____.

3、不等式 $\frac{4x^2}{(1-\sqrt{1+2x})^2} < 2x+9$ 的解集为_____.

4、设复数 z 满足条件 $|z-i|=1$, 且 $z \neq 0$, $z \neq 2i$, 又复数 ω 使得 $\frac{\omega-2i}{\omega} \cdot \frac{z}{z-2i}$ 为实数, 则复数 $\omega-2$ 的辐角主值的取值范围是_____.

5、设 $a_1, a_2, \dots, a_{2002}$ 均为正实数, 且 $\frac{1}{2+a_1} + \frac{1}{2+a_2} + \dots + \frac{1}{2+a_{2002}} = \frac{1}{2}$, 则 $a_1 a_2 \dots a_{2002}$ 的最小值是_____.

6、在一个由十进制数字组成的数码中, 如果它含有偶数个数字 8, 则称它为“优选”数码 (如 12883, 787480889 等), 否则称它为“非优选”数码 (如 2348756, 958288 等), 则长度不超过 n (n 为自然数) 的所有“优选”数码的个数之和为_____.

三、(20分)

已知数列 $\{a_n\}$ 是首项为 2, 公比为 $\frac{1}{2}$ 的等比数列, 且前 n 项和为 S_n .

(1) 用 S_n 表示 S_{n+1} ;

(2) 是否存在自然数 c 和 k , 使得 $\frac{S_{k+1}-c}{S_k-c} > 2$ 成立.

四、(20分)

设异面直线 a, b 成 60° 角, 它们的公垂线段为 EF , 且 $|EF|=2$, 线段 AB 的长为 4, 两端点 A, B 分别在 a, b 上移动. 求线段 AB 中点 P 的轨迹方程.

五、(20分)

已知定义在 \mathbf{R}^+ 上的函数 $f(x)$ 满足

(i) 对于任意 $a, b \in \mathbf{R}^+$, 有 $f(ab)=f(a)+f(b)$;

(ii) 当 $x > 1$ 时, $f(x) < 0$;

(iii) $f(3)=-1$.

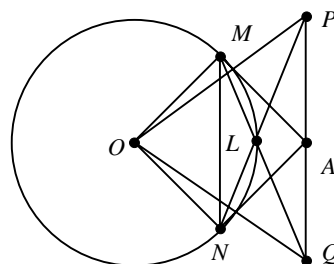
现有两个集合 A, B , 其中集合 $A=\{(p, q) \mid f(p^2+1)-f(5q)-2 > 0, p, q \in \mathbf{R}^+\}$, 集合 $B=\{(p, q)$

$\mid f(\frac{p}{q})+\frac{1}{2}=0, p, q \in \mathbf{R}^+\}$. 试问是否存在 p, q , 使 $A \cap B \neq \emptyset$, 说明理由.

第二试

一、(50分)

如图, AM 、 AN 是 $\odot O$ 的切线, M 、 N 是切点, L 是劣弧 MN 上异于 M 、 N 的点, 过点 A 平行于 MN 的直线分别交 ML 、 NL 于点 Q 、 P . 若 $S_{\odot O} = \frac{2\pi}{\sqrt{3}} S_{\triangle POQ}$, 求证: $\angle POQ = 60^\circ$.



二、(50分)

已知数列 $a_1=20$, $a_2=30$, $a_{n+2}=3a_{n+1}-a_n$ ($n \geq 1$), 求所有的正整数 n , 使得 $1+5a_n a_{n+1}$ 是完全平方数.

三、(50分)

设 M 为坐标平面上坐标为 $(p \cdot 2002, 7p \cdot 2002)$ 的点, 其中 p 为素数. 求满足下列条件的直角三角形的个数:

- (1) 三角形的三个顶点都是整点, 而且 M 是直角顶点;
- (2) 三角形的内心是坐标原点.

参考答案

第一试

一、选择题:

1、A; 2、C; 3、B; 4、D; 5、D; 6、B

二、填空题:

$$1、\left[\frac{\sqrt{3}}{3}, 1\right); 2、f(\alpha) = \begin{cases} 0, 0^\circ < \alpha < 30^\circ \\ 1, \alpha = 30^\circ \\ 2, 30^\circ < \alpha < 60^\circ \\ 3, \alpha = 60^\circ \\ 4, 0^\circ < \alpha < 90^\circ \end{cases}; 3、\left[-\frac{1}{2}, 0\right) \cup \left(0, \frac{45}{8}\right);$$

$$4、\left[\pi - \arctan \frac{4}{3}, \pi\right); 5、4002^{2002}; 6、\frac{1}{2}\left(\frac{10^{n+1}}{9} + \frac{8^{n+1}}{7} - \frac{142}{63}\right).$$

$$三、(1) S_{n+1} = \frac{1}{2}S_n + 2; \quad (2) \text{不存在.}$$

$$四、\frac{x^2}{9} + y^2 = 1.$$

五、不存在.

第二试

一、证略;

二、 $n=3$.

三、 $p \neq 2, 7, 11, 13$ 时, 324 个; $p=2$ 时, 162 个; $p=7, 11, 13$ 时, 180 个.