

高中数学联赛培训题 (二)

一、选择题 (每小题 6 分):

1. P_1P_2 是双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > 0, b > 0$) 的弦, P 是 P_1P_2 的中点, O 是坐标原点, 斜率 $k_{P_1P_2}$ 存在且不为零, k_{OP} 也存在且不为零, 则 $k_{P_1P_2} \cdot k_{OP} =$ ()

- A. $\frac{a^2}{a^2+b^2}$ B. $\frac{b^2}{a^2}$ C. $\frac{a^2}{b^2}$ D. $-\frac{a^2+b^2}{b^2}$

2. 数列 $\{a_k\}$ 为等差数列, 共有 $2n+1$ 项, 其中奇数项之和为 320, 偶数项之和为 290, 则第 $n+1$ 项的值为 ()

- A. 30 B. 305 C. 15 D. 该数列不存在, 因而 a_{n+1} 不能求出

3. 已知 x 和 y 是实数, $z_1 = (x+4) + yi$, $z_2 = (x-4) + yi$, $|z_1| + |z_2| = 10$, 令 $u = |x - y - \sqrt{34}|$, 则 u 的最大值为 ()

- A. 0 B. $\sqrt{34}$ C. $2\sqrt{34}$ D. 4

4. 现有四个命题: ① $f(x) = \arccos x + \operatorname{arccot} x$ 的值域是 $[\frac{\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}]$; ② $g(x) = \arcsin x + \arccos x$ 是偶函数; ③ $\varphi(x) = \sin(\arcsin x)$ 是周期函数; ④ $\sin(\arcsin x) = \arcsin(\sin x)$ 成立的充分必要条件是 $x \in [-1, 1]$ 。其中正确的命题是 ()

- A. 只有①③ B. 只有②④ C. 只有①③④ D. 只有①②④

5. 设变量 x 满足 $x^2 + bx \leq -x$ ($b < -1$), 且 $f(x) = x^2 + bx$ 的最小值是 $-\frac{1}{2}$, 则 $b =$ ()

- A. $-\sqrt{2}$ B. $-\frac{3}{2}$ C. -2 D. $-\sqrt{2}$ 或 $-\frac{3}{2}$

6. 已知定义在实数集 R 上的函数 $f(x)$, 其值域也是 R , 并且对任意 $x, y \in R$, 都有 $f[xf(y)] = xy$, 则 $|f(1997)| =$ ()

- A. 0 B. 1997^2 C. 1997 D. 1

二、填空题 (每小题 9 分):

7. 已知 $\triangle ABC$ 的三个内角满足 $A = 2B$, 且 $B^2 = AC$, 三边满足 $\frac{a}{a+b+c} = 2\sin x$, $x \in (0, \frac{\pi}{2})$, 则 x 等于_____.

8. 一副桥牌 52 张, 排成一横排, 任意两张 A 都不相邻, 则所有不同排列的总数为_____.

9. 对满足不等式 $|\log_2 p| < 2$ 的一切实数中, 使不等式 $x^2 + px + 1 > 3x + p$ 都成立的 x 的取值范围是_____.

10. 已知等腰三角形的最大边长为 13, 周长为 28, 面积为 27, 则它的最小边长是_____.

11. 在正方形 $ABCD$ 内部一点 P 满足 PB 是 PA 与 PC 的等差中项, PD 是 PB 与 PC 的等比中项。 $PA < PB < PD < PC$, $PA=1$, 则 $PD=$ _____.

12. 若 x 是一个十进制四位整数, 记 x 的各位数码之积为 $T(x)$, 各位数码之和为 $S(x)$, p 为素数, 且 $T(x)=p^k$, $S(x)=p^n-5$, 则 x 中的最小者是_____.

三、解答题 (每小题 20 分):

13. 已知二面角 $\alpha-EF-\beta$ 为 30° , $A'E \subset \alpha$, $B'F \subset \beta$, 且 $A'E \perp EF$, $B'F \perp EF$, $A \in A'E$, $B \in B'F$, $EF=a$, $AB=\sqrt{2}a$ 。求四面体 $ABEF$ 体积的最大值。

14. 设 $n \in N$, 求证: (1) $\lg(n+1) > \frac{3}{10n} + \lg n$; (2) $\lg(n!) > \frac{3}{10}(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n})$ 。

15. 如果一个矩形的长和宽都为奇数, 在其内部是否存在这样的点, 它到四个顶点的距离都是正整数。