

## 高中数学联赛培训题 (三)

### 一、选择题 (每小题 6 分):

- 1、若  $2^x = 3^y = 5^z > 1$ , 则  $2x$ 、 $3y$ 、 $5z$  从小到大的顺序是 ( )  
A.  $3y < 2x < 5z$  B.  $5z < 2x < 3y$  C.  $2x < 3y < 5z$  D.  $5z < 2y < 2x$
- 2、自然数  $m$ 、 $n$ 、 $p$ 、 $q$  满足等式  $m^2 + n^2 = p^2 + q^2$ , 则  $m+n+p+q$  ( )  
A. 是质数 B. 是合数 C. 可能是质数, 也可能是合数 D. 既不是质数也不是合数
- 3、若  $\triangle ABC$  是钝角三角形, 则  $\arccos(\sin A) + \arccos(\sin B) + \arccos(\sin C)$  的值域是  
A.  $(0^\circ, 90^\circ]$  B.  $(90^\circ, 270^\circ)$  C.  $(0^\circ, 270^\circ)$  D.  $\{90^\circ\}$
- 4、适合  $x^{300} < 9^{700}$  的最大的自然数  $x$  是 ( )  
A. 166 B. 167 C. 168 D. 169
- 5、若复数  $z$  的共轭复数是  $\bar{z}$ , 且  $|z|=1$ , 又  $A(-1,0)$  与  $B(0,-1)$  为定点, 则函数  $f(z) = |(z+1)(\bar{z}-i)|$  取最大值时在复平面上以  $z$ 、 $A$ 、 $B$  三点为顶点的图形是 ( )  
A. 等边三角形 B. 直角三角形 C. 等腰三角形 D. 等腰直角三角形
- 6、 $x, y, m \in R$ ,  $M = \{(x, y) | y^2 = x-1\}$ ,  $N = \{(x, y) | y = 2x - 2m^2 + m - 2\}$ , 则集合  $M \cap N$  中含有的元素的个数是 ( )  
A. 0 或 1 或 2 B. 0 或 1 C. 0 D. 1 或 2

### 二、填空题 (每小题 9 分):

- 7、设  $a, b \in R$ , 且满足  $a\sqrt{1-b^2} + b\sqrt{1-a^2} = 1$ , 则  $a^2 + b^2$  的值是\_\_\_\_\_.
- 8、函数  $y = |x|$  和  $y = \frac{6-x}{5}$  的图像围成  $\triangle ABC$ , 当这个三角形绕  $x$  轴旋转  $\frac{2}{3}$  个弧度时, 所得旋转体的体积是\_\_\_\_\_.
- 9、四个正数之和为 4, 平方和为 8, 则这四个数中最大的那个数的最大值是\_\_\_\_\_.
- 10、一个圆锥和一个圆柱, 下底面在同一平面上, 它们有公共的内切球, 记圆锥的体积为  $V_1$ , 圆柱的体积为  $V_2$ , 且  $V_1 = kV_2$ , 则  $k_{\min} =$ \_\_\_\_\_.
- 11、设  $f(x)$  的定义域和值域均为  $R$ , 且对任意的  $a, b \in R$ , 均有  $f[af(b)] = ab$ , 则  $|f(2000)| =$ \_\_\_\_\_.
- 12、一个三位自然数  $(a_1a_2a_3)$  如果同时有  $a_1 > a_2$  及  $a_3 > a_2$  称为凹数, (例如 104、525、849 都是凹数, 而 123、684、200 都不是凹数), 则所有凹数的个数是\_\_\_\_\_.

### 三、解答题 (每小题 20 分):

13、已知  $2 \leq x \leq 3$ ，试求函数  $y = f(x) = \frac{1-x+\sqrt{2x^2-2x+1}}{2x}$  的最大值。

14、已知点  $M$  是抛物线  $x^2 = 4(y-1)$  的顶点。以  $M$  关于  $x$  轴的对称点  $C$  为圆心，且与  $x$  轴相切作圆  $C$ 。过抛物线上任意一点  $P$  作圆  $C$  的两条切线，这两条切线交抛物线准线于  $A$ 、 $B$  两点，求  $|AB|$  的取值范围。

15、实数  $m, n$  满足  $m \geq 1, n \geq 1$  且  $(\log_a m)^2 + (\log_a n)^2 = \log_a(am^2) + \log_a(an^2)$  ( $a > 1$ )，试求  $\log_a(mn)$  的范围。