

高中数学联赛培训题（四）

一、选择题（每小题6分）：

1. 若 $A = \{\text{两边之和小于第三边的三角形}\}$, $B = \{\text{三边之比为}1:2:3\text{的三角形}\}$, 则关系式 $\emptyset \subseteq (A \cap B)$, $(A \cup B) \subseteq (A \cap B)$, $A = B$ 中成立的个数是 ()
A. 0个 B. 1个 C. 2个 D. 3个
2. 方程 $3\cos\frac{x}{2} = 10^x + 10^{-x} + 1$ 的实数解有 ()
A. 0个 B. 1个 C. 2个 D. 3个
3. a, b 是异面直线, 直线 c 与 a 所成的角等于 c 与 b 所成的角, 这样的直线 c ()
A. 有一条 B. 有两条 C. 不存在 D. 有无数条
4. 等腰三角形的周长为 a , 一腰的中线将周长分成 $5:3$, 则三角形的底边长为 ()
A. $\frac{a}{6}$ B. $\frac{a}{2}$ C. $\frac{a}{6}$ 或 $\frac{a}{2}$ D. $\frac{4}{5}a$ 或 $\frac{3}{5}a$
5. 若 a, b 均为正整数, 则恰过 $(a, 0)$ 、 $(0, b)$ 和 $(1, 3)$, 这三点的直线共有 ()
A. 1条 B. 2条 C. 3条 D. 无数多条
6. 若 $a = \log_{\pi}(\arccos\frac{\sqrt{3}}{2})$ 、 $b = \arccos(\log_{\pi}\frac{2}{\sqrt{3}})$ 、 $c = \arccos(\log_{\pi}\frac{\sqrt{3}}{2})$, 则 a, b, c 的大小关系是 ()
A. $b < a < c$ B. $a < b < c$ C. $c < a < b$ D. $b < c < a$

二、填空题（每小题9分）：

7. 直线 $x\csc^2 20^\circ + y\sec^2 110^\circ = 1$, 对 x 轴的倾角是_____.
8. 设 $a > 1, m > p > 0$, 若方程 $x + \log_a x = m$ 的解是 P , 则方程 $x + a^x = m$ 的解是_____.
9. $1^3 - 2^3 + 3^3 - 4^3 + \dots + 1993^3 - 1994^3 + 1995^3$ 被 3 除所得的余数是_____.
10. 函数 $f(x), g(x)$ 的定义域为 R , 且 $f(x) \geq 0$ 的解集为 $\{x | 1 \leq x < 2\}$, $g(x) \geq 0$ 的解集为 \emptyset , 则不等式 $\frac{f(x)}{g(x)} > 0$ 的解集为_____.
11. 设复数 $z = a + bi$ ($a, b \in R, b > 0$), $\frac{z^2}{1+z}$ 和 $\frac{z}{1+z^2}$ 都是实数, 则 $z =$ _____.
12. 已知 $\alpha, \beta, \gamma \in [0, 2\pi]$ 且互不相等, $2\cos\alpha(1 + \cos\alpha) + 3\sin\alpha(1 - \sin\alpha) = 2\cos\beta(1 + \cos\beta) + 3\sin\beta(1 - \sin\beta) = 2\cos\gamma(1 + \cos\gamma) + 3\sin\gamma(1 - \sin\gamma) = 0$, 则 $\cot\frac{\alpha + \beta + \gamma}{2}$ 的值为_____.

三、解答题（每小题 20 分）：

13. 若 $a, b, c, d > 0$ ，证明：在方程 $\frac{1}{2}x^2 + \sqrt{2a+b} \cdot x + \sqrt{cd} = 0$ ， $\frac{1}{2}x^2 + \sqrt{2b+c} \cdot x + \sqrt{da} = 0$ ， $\frac{1}{2}x^2 + \sqrt{2c+d} \cdot x + \sqrt{ab} = 0$ ， $\frac{1}{2}x^2 + \sqrt{2d+a} \cdot x + \sqrt{bc} = 0$ 中，至少有两个方程有不相等的实数根。

14. 已知二次函数 $f(x) = ax^2 + bx + 1$ ($a, b \in R, a > 0$)，设方程 $f(x) = x$ 的两个实数根为 x_1 和 x_2 。(1) 如果 $x_1 < 2 < x_2 < 4$ ，设函数 $f(x)$ 的对称轴为 $x = x_0$ ，求证： $x_0 > -1$ ；(2) 如果 $|x_1| < 2$ ， $|x_1 - x_2| = 2$ ，求 b 的取值范围。

15. 设 $P(x+a, y_1)$ ， $Q(x, y_2)$ ， $R(2+a, y_3)$ 是函数 $f(x) = a + 2^x$ 的反函数图象上不同的三点，如果使 y_1, y_2, y_3 成等差数列的实数 x 有且只有一个，试求实数 a 的取值范围。