

高中数学联赛培训题（五）

一、选择题（每小题6分）

1. 若 $x \in [0, 2\pi)$ ，关于 x 的方程 $\tan^2 x - 5 \tan x + 1 = 0$ 的所有根之和为（ ）
A. $\frac{3\pi}{2}$ B. $\frac{\pi}{2}$ C. π D. 3π
2. 曲线 $\rho = \sin \theta$ 与曲线 $\rho = \cos 2\theta$ 的公共点的个数共有（ ）
A. 1 B. 2 C. 3 D. 4
3. 若 $a = \arcsin \frac{2}{3}$ ， $b = \arctan \frac{3}{2}$ ， $c = \arccos \frac{4}{5}$ ，则有（ ）
A. $a < b < c$ B. $c < a < b$ C. $b < c < a$ D. $c < b < a$
4. 若任何三个连续自然数的立方和都能被正整数 a 整除，则这样的 a 的最大值是（ ）
A. 2 B. 3 C. 9 D. 不存在
5. 以平行六面体的8个顶点中的任意三个顶点为顶点的所有三角形中，锐角三角形的最多可能个数是（ ）
A. 28 B. 32 C. 34 D. 36
6. 平面内一直线 l 的一侧有线段 AB ，它的中点到 l 的距离等于常数 d ，当线段 AB 、 l 及点 A 点 B 到 l 的垂线段所围成的图形绕 l 旋转一周所得旋转体的全面积最小时，这旋转体是（ ）
A. 圆柱 B. 圆锥 C. 圆台 D. 两个圆锥

二、填空题（每小题9分）

7. 设 $M = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ ， $x \subseteq M$ ，令 $S(x)$ 为 x 中的所有元素之和，则全体 $S(x)$ 的总和 $S =$ _____.
8. 等比数列 $\{a_n\}$ 的各项均为正数，前 k 项中，数值最大的一项为 54，其和为 80，前 $2k$ 项之和为 6560，则公比 $q =$ _____.
9. 实数 x, y 适合方程 $x^2 + xy + y^2 = 2$ ，若 $k = x^2 + y^2$ ，则 k 的取值范围是_____.
10. 有些实数 a ，使得关于 x 的方程 $\frac{\lg x}{\log_2 x} = \lg a^x$ 有不超过 2 的实根，这样的 a 构成的集合_____.
11. $\triangle ABC$ 中， $AB = 5$ ， D 为 AB 边上一点， $AD = 2$ ，若 $\angle C$ 的平分线恒过点 D ，这样的三角形的最大面积为_____.
12. $\{a_n\}$ 为一实数列，相邻两数为方程 $x^2 + (4n+2)x + b_n = 0$ 的两根， $a_1 = -1$ ，则 $\{b_n\}$ 的通项公式为_____.

三、解答题（每小题20分）

13. 已知实数 a 、 b 、 c 满足条件: $\frac{a}{m+2} + \frac{b}{m+1} + \frac{c}{m} = 0$, 其中 m 是正数, 对于

$f(x) = ax^2 + bx + c$ 。(1)如果 $a \neq 0$, 证明: $af\left(\frac{m}{m+1}\right) < 0$ 。(2)如果 $a = 0$, 试证明方程 $f(x) = 0$ 在 $(0,1)$ 内有解。

14. 在抛物线 $y^2 = 2px$ ($p > 0$) 的轴的正方向是否存在一点 K , 使得对于经过 K 点的抛物线

的任意一条弦 AB , 总有 $\frac{1}{|KA|^2} + \frac{1}{|KB|^2}$ 为定值? 证明你的结论。

15. 已知 a, b 是任意的正实数, 求证: $\frac{a^n + a^{n-1}b + \cdots + ab^{n-1} + b^n}{n+1} \geq \frac{(a+b)^n}{2^n}$ 。