

## 高中数学联赛培训题（七）

### 一、选择题（每小题6分）

1. 函数  $y = \pi - 3\arcsin \frac{x^2 + 4x + 5}{2}$  的值域是（ ）
- A.  $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$  B.  $[-\frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}]$  C.  $[\frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}]$  D.  $[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$
2. 已知  $\triangle ABC$  的三边  $a, b, c$  成等比数列,  $a, b, c$  的对角依次为  $A, B, C$ , 则  $\sin B + \cos B$  的取值范围是（ ）
- A.  $[\frac{1}{2}, \frac{2+\sqrt{3}}{2}]$  B.  $(1, \sqrt{2}]$  C.  $(1, \frac{2+\sqrt{3}}{2}]$  D.  $[\frac{1}{2}, \sqrt{2}]$
3. 在  $120^\circ$  的二面角  $P-a-Q$  的两个面  $P$  和  $Q$  内分别有点  $A$  和点  $B$ , 已知点  $A$  和点  $B$  到棱的距离分别是 2 和 4, 且线段  $AB = 10$ ,  $AB$  和平面  $Q$  所成的角为  $\alpha$ , 则（ ）
- A.  $\alpha = \arcsin(\frac{1}{5}\sqrt{\frac{21}{22}})$  B.  $\alpha = \frac{\pi}{6}$  C.  $\alpha = \arcsin \frac{\sqrt{3}}{10}$  D. 以上都不对
4. 当  $a \neq b, c \neq d$  时,  $P = 3^a + 7^c, Q = 3^b + 7^d$ ,  $a, b, c, d$  均为自然数, 则（ ）
- A.  $P$  和  $Q$  一定不相等 B. 仅有一组  $a, b, c, d$  的值使  $P = Q$
- C. 有有限多组  $a, b, c, d$  的值使  $P = Q$  D. 有无穷多组  $a, b, c, d$  的值使  $P = Q$
5. 已知多项式  $P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n$ , 其中  $n$  为非负整数,  $a_0$  为正整数,  $a_1, a_2, \dots, a_n$  为整数, 且满足  $n + |a_0| + |a_1| + \dots + |a_n| = 3$ , 这样的多项式共有（ ）
- A. 4 个 B. 5 个 C. 6 个 D. 不存在
6. 从  $\{1, 2, 3, 4, \dots, 20\}$  中选取四个不同的数  $a, b, c, d$ , 满足  $a + c = b + d$ , 若不考虑  $a, b, c, d$  的顺序, 则选取方法的总数为（ ）
- A. 1050 B. 525 C. 1140 D. 190

### 二、填空题（每小题9分）

7. 若  $3f(x-2000) + 4f(2000-x) = 5(x-2000)$ , 对所有实数  $x$  都成立, 则  $f(x)$  的解析式是\_\_\_\_\_。
8. 已知  $a \in [-1, 1]$ , 则不等式  $x^2 + (a-4)x + 4 - 2a > 0$  恒成立时的  $x$  的范围是\_\_\_\_\_。

9. 已知  $M = 2^7 t = 3^5 s$ , 其中  $t$  是奇数,  $s$  不能被 3 整除, 则  $M$  的所有形如  $2^p 3^q$  的约数之和等于\_\_\_\_\_。

10. 已知  $x_1, x_2, \dots, x_{57}$  都是正整数, 且  $x_1 + x_2 + \dots + x_{57} = 100$ , 则  $x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_{57}^2$  的最大值是\_\_\_\_\_。

11. 在  $\triangle ABC$  中,  $\angle C$  为钝角,  $a, b, c$  为三角形的三边, 且  $\angle C$  的对边为  $c$ ,  $a^2 = b(b+c)$ , 则  $a$ 、 $2b$ 、 $c$  的大小关系是\_\_\_\_\_。

12. 将一枚硬币掷出, 若出现正面, 点  $P$  就在数轴上移动 +1, 若出现反面就不动, 掷币次数不超过 12 次, 而且点  $P$  达到了坐标点 +10 就不再掷了。则点  $P$  到达坐标点 +10 的所有不同情况共有\_\_\_\_\_种。

### 三、解答题 (每小题 20 分)

13. 已知  $\triangle ABC$ ,  $B \leq 30^\circ$ ,  $BC = \sqrt{3}$ , 以  $B$  为圆心, 以 1 为半径的圆与以  $A$  为圆心, 以  $r (r \geq 1)$  为半径的圆相交。求证: 顶点  $B, C$  至少有一点在圆  $A$  的内部或边上。

14. 已知数列  $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$  的各项都是非负实数, 且  $a_n^2 - a_n + a_{n+1} \leq 0$ , 求证: 对所有不小于 2 的自然数  $n$ , 都有  $a_n \leq \frac{1}{n+2}$ 。

15. 已知  $PQ$  是圆  $x^2 + y^2 = r^2 (r > 0)$  中与  $x$  轴垂直的一条定弦。求证: 所有被  $PQ$  平分的弦所在的直线都与同一条抛物线仅有一个公共点。