高中数学联赛培训题（八）

一、选择题（每小题 6 分）：

1．函数 $y=2(\log_{\frac{1}{2}}x)^2-2\log_{\frac{1}{2}}x+1$ 的递增区间是（　）

A. $(0,\frac{1}{2})$　B. $[\frac{1}{2},\frac{\sqrt{2}}{2})$　C. $[\frac{\sqrt{2}}{2},+\infty)$　D. 不存在

2．ΔABC 中，$A>B$ 是 $\cos 2B>\cos 2A$ 的（　）

A. 充分条件　B. 必要条件　C. 充要条件　D. 既不充分也不必要条件

3．数列 $\{\frac{100^n}{n!}\}$ $(n=1,2,3,\cdots)$ 是（　）

A. 递增数列　B. 从第 2000 项以后有减、有增数列

C. 递减数列　D. 能够找到一项，从这项以后是递减的

4．如果 $x,y,z>0$，且 $x^2+y^2+z^2=1$，则表达式 $\frac{yz}{x}+\frac{xz}{y}+\frac{xy}{z}$ 的最小值（　）

A. $\sqrt{3}$　B. 3　C. $\frac{\sqrt{3}}{2}$　D. $3\sqrt{3}$

5．若存在实数 a 使等式 $x\sqrt{a(x-a)}+y\sqrt{a(y-a)}=\sqrt{|\lg(x-a)-\lg(a-y)|}$ 在实数范围内成立，则 $(3x^2+xy-y^2):(x^2-xy+y^2)$ 的值为（　）

A. 3:1　B. 1:3　C. 2:1　D. 1:2

6．命题甲：“一个二面角的两个半平面分别垂直于另一个二面角的两个半平面，则这两个二面角相等或互补。”命题乙：“底面为正三角形，侧面为等腰三角形的三棱锥是正三棱锥。”命题丙：“过圆锥的两条母线的截面，以轴截面的面积最大。”其中真命题的个数是（　）

A. 0　B. 1　C. 2　D. 3

二、填空题（每小题 9 分）：

7．若 $2|\sin x|^{1+\lg 2}=1+|\sin x|$，则 x 的解集是__________。

8．若 n 为自然数，且 n^3+2n^2+9n+8 是某个自然数的立方，则 $n=$_____。

9．从 $\{19,20,21,\cdots,91,92,93\}$ 中选取两个不同的数，使其和为偶数的选法总数是_____。

10．如果 $z=2\cos\frac{\pi}{8}(\sin\frac{3\pi}{4}+i+i\cos\frac{3\pi}{4})$，则 $z^{12}=$_____。

11．平面直角坐标系 xoy 中，坐标满足条件 $(x^2+y^2+2x+2y)(4-x^2-y^2)\geq 0$ 的点组成的图形面积是_____。

12．若抛物线 $C_m: y=x^2-mx+m+1$ 与线段 AB（其中 $A(0,4),B(4,0)$）恰有两个交点，则 m 的取值范围是__________。

三、解答题（每小题 20 分）：

13．求函数 $y=\sqrt{2x^2-2x+1}+\sqrt{2x^2-(\sqrt{3}-1)x+1}+\sqrt{2x^2+(\sqrt{3}+1)x+1}$ 的最小值。

14．如果 $a_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}\ (n\in N)$。证明：对于一切 $n\geq 2$，都有 $a_n^2>2(\frac{a_2}{2}+\frac{a_3}{3}+\cdots\frac{a_n}{n})$。

15．半圆的直径 $|AB|=2R$，半圆外的直线 l 与 BA 的延长线垂直，垂足为 T，且 $|AT|=2a$（$2a<\frac{R}{2}$），半圆上有相异两点 M、N，它们到 l 的距离分别为 d_1、d_2，且 $d_1=|AM|$，$d_2=|AN|$，求证：$|AM|+|AN|=2R$。