

高中数学联赛培训题（九）

一、选择题（每小题6分）

1. 已知 $45^\circ < x < 90^\circ$ ，设 $a = 2^{1-\sin x}$ ， $b = 2^{\cos x}$ ， $c = 2^{\lg x}$ ，则有（ ）
A. $a < b < c$ B. $b < a < c$ C. $a < c < b$ D. $b < c < a$
2. 函数 $y = \arccos x$ ($-1 \leq x \leq 1$) 的图象关于 y 轴的对称图形记为 C_1 ，而 C_1 关于直线 $y = x$ 对称的图象记为 C_2 ，则 C_2 的解析式是（ ）
A. $y = \cos x$ ($0 \leq x \leq \pi$) B. $y = \arcsin x$ ($-1 \leq x \leq 1$)
C. $y = -\cos x$ ($0 \leq x \leq \pi$) D. 以上答案都不对
3. 数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n = n^3 - 20n^2 - 10n + 1$ ($n \in N^*$)，问此数列从第几项开始严格递增？（ ）
A. 第 10 项 B. 第 13 项 C. 第 14 项 D. 第 22 项
4. 使得方程 $a^2 + b^2 = Kab$ 有正整数解 (a, b) 的正整数 K 的个数是（ ）
A. 0 个 B. 1 个 C. 无穷多个 D. 不只一个，但只有有限多个
5. 在复平面上，曲线 $z^4 + z = 1$ 与圆周 $|z| = 1$ 的交点个数是（ ）
A. 0 B. 1 C. 2 D. 3
6. 设 $a_n = 4^{2n+1} + 3^{n+2}$ ($n \in N$)， p 是能整除 a_1, a_2, a_3, \dots 中无穷多项的最小素数， q 是能整除 a_1, a_2, a_3, \dots 中每一项的最小素数，则 pq 是（ ）
A. 5×7 B. 7×13 C. 13×13 D. 以上答案都不是

二、填空题（每小题9分）

7. 方程 $\sin |x| = |\cos x|$ 在闭区间 $[-10\pi, 10\pi]$ 内的解的个数是_____。
8. 若直线 l 过点 $A(\frac{1}{2}, \frac{1}{3})$ 和点 $B(\frac{1}{4}, \frac{1}{5})$ ，则在 l 上且离 A 点距离最近的格点（即纵、横坐标都为整数的点）的坐标是_____。
9. 已知方程 $2x^2 + 2xy + y^2 + 2x + 2y - 4 = 0$ 在平面直角坐标系 xOy 中表示一个椭圆，则此椭

圆的中心的坐标是_____。

10. $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数, 则 $[\sqrt{1}] + [\sqrt{2}] + [\sqrt{3}] + \cdots + [\sqrt{99}] =$ _____。

11. 给定正整数 n 和常数 $a > 0$, x 是任意正数, 则 $\frac{(a^n + x^n)(a + x)^n}{x^n}$ 的最小值是_____。

12. 在 $1 \sim 100$ 范围内有_____个正整数 n , 使得 $1 + n^{1993}$ 与 $1 + n^{1994}$ 互素。

三、解答题 (每小题 20 分)

13. 动点 C 在以 AB 为直径, 半径为 1 的半圆周上移动, 延长 AC 到 D , 使得 $CD : CB = K : 1$ ($K > 0$, K 为常数), 试求 D 点所得出的曲线的长度。

14. 已知 a_1, a_2, \dots, a_n 是 n 个正实数, a 和 b 是正实数, 满足 $a_1 a_2 \cdots a_n = a^n$, 求证:

$$(a_1 + b)(a_2 + b) \cdots (a_n + b) \geq (a + b)^n。$$

15. 一动点 P 到一定点 $F(-c, 0)$ 的距离等于到一定圆 $(x - c)^2 + y^2 = 4r^2$ 上的点的最短距离, 试求动点的轨迹。