高中数学联赛培训题（十）

一、选择题（每小题 6 分）：

1．若 $M=\{(x,y)\,|\,|\tan\pi y|+\sin^2\pi x=0\}$， $N=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\le 2\}$，则 $M\cap N$ 的元素个数是（　）

A．4　B．5　C．8　D．9

2．已知函数 $y=2+\log_3 x$， $x\in[1,9]$，则 $y=[f(x)]^2+f(x^2)$ 的最大值为（　）

A．22　B．13　C．6　D．-3

3．记 $S_1=1+2+\cdots+n$， $S_2=1^2+2^2+\cdots+n^2$， $S_3=1^3+2^3+\cdots+n^3$，那么使 S_1,S_2,S_3 成等差数列的自然数 n 的值（　）

A．不存在　B．有且只有 1 个　C．有且仅有 2 个　D．有无数多个

4．函数 $y=\dfrac{\lg 5+\lg(x^2+1)}{\lg(x-2)}-2$ 的图像与 x 轴交点的个数为（　）

A．0 个　B．1 个　C．2 个　D．3 个

5．在下列数组中，哪一组不可能为一个三角形的三条高的长度（　）

A．$1,\sqrt{3},2$　B．$3,4,5$　C．$5,12,13$　D．$8,15,17$

6．在 ΔABC 中，角 A,B,C 的对边边长分别是 a,b,c，若 $c-a$ 等于 AC 边上的高 h，则 $\sin\dfrac{C-A}{2}+\cos\dfrac{C+A}{2}$ 的值是（　）

A．-1　B．$\dfrac{1}{2}$　C．$\dfrac{1}{3}$　D．1

二、填空题（每小题 9 分）：

7．三个互不相等的有理数，既可表示为 $1,a+b,a$ 的形式，又可表示为 $0,\dfrac{b}{a},b$ 的形式，则 $a^n+b^{n+1}\ (n\in N)=$_____。

8．若数 $1,x,y$ 既分别为一等差数列的第 l,m,n 项，又分别为一等比数列的第 l,m,n 项，则 x 与 y 的关系是_____。

9．已知 $f(x)=a\sin x+b\sqrt[3]{x}+4$（$a,b$ 为实数），且 $f[\lg(\log_3 10)]=5$，则 $f[\lg(\lg 3)]=$_____。

10． ΔABC 中，已知 $A=60^\circ$， $BC=\sqrt{12345678}$，则 $AB\cdot AC$ 的最大值是_____。

11．若 $a_n=6^n+8^n$，则 a_{2000} 除以 49 的余数为_____。

12．当 $x_0>x_1>x_2>\cdots>x_n>0$ 时，$\log_{\frac{x_0}{x_1}}2000+\log_{\frac{x_1}{x_2}}2000+\cdots+\log_{\frac{x_{n-1}}{x_n}}2000\geq K\log_{\frac{x_0}{x_n}}2000$ 恒成立，则 K 的最大值是_____。

三、解答题（每小题 20 分）：

13．自双曲线 $x^2-y^2=1$ 上一动点 Q 作直线 $x+y+2=0$ 的垂线，其垂足为 N，求 QN 中点 P 的轨迹方程。

14．a,b,c 均为整数，$f(x)=ax^2+bx+c$，方程 $f(x)=0$ 在 $(0,1)$ 内有不相等的两实根，求 a 的最小正整数值。

15．已知动点 A、B 在直线 $x=3$ 上移动，且 $\angle AOB=60^\circ$（O 为原点），求 ΔAOB 外心 M 的轨迹方程。