

高中数学联赛培训题（十一）

一、选择题（每小题6分）：

1. $\frac{(2^3-1)(3^3-1)(4^3-1)\cdots(100^3-1)}{(2^3+1)(3^3+1)(4^3+1)\cdots(100^3+1)}$ 的值最接近于 ()

- A. $\frac{1}{2}$ B. $\frac{2}{3}$ C. $\frac{3}{5}$ D. $\frac{5}{8}$

2. 在锐角 $\triangle ABC$ 中, AD 、 BE 分别是边 BC 、 CA 上的高 (D 、 E 是垂足), AD 与 BE 的交点为 H , 若 $AD=4$, $BD=3$, $CD=2$, 则 HD 等于 ()

- A. $\frac{3}{2}$ B. $\frac{\sqrt{5}}{2}$ C. $\frac{5}{2}$ D. $\sqrt{5}$

3. 正整数 $n \leq 1000$, 且 n 可以写成 5 个连续正整数的和、6 个连续正整数的和、7 个连续正整数的和, 这样的正整数 n 有 ()

- A. 3 个 B. 4 个 C. 5 个 D. 6 个

4. 满足方程 $19x+97y=4xy$ 的正整数对 (x,y) 有 ()

- A. 0 对 B. 1 对 C. 2 对 D. 多于 2 对

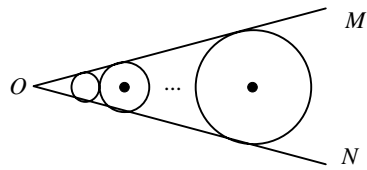
5. 平面内有 10 个点, 其中有 5 个点在一条直线上, 此外没有 3 个点在一条直线上, 则过这 10 个点中任 2 点可作的射线条数是 ()

- A. 36 B. 70 C. 72 D. 78

6. 如图, 有 1999 个圆分别与 $\angle MON$ 的两边相切, 而这些圆依次一个相切于另一个, 若最大圆与最小圆的半径分别为 1998、222, 那么, 它们中

的正中间的圆的半径为 ()

- A. 1110 B. 1776 C. 666 D. 不能确定



二、填空题（每小题9分）：

7. 设 $f(x)+g(x)=\sqrt{\frac{1+\cos 2x}{1-\sin x}}$ ($x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$), 且 $f(x)$ 为奇函数, $g(x)$ 为偶函数, 则

$[f(x)]^2 - [g(x)]^2 = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

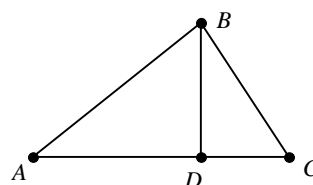
8. 已知 m, n 为正整数, 使 $\frac{m+n}{m^2+mn+n^2} = \frac{4}{49}$, 则 $m+n$ 的值为 $\underline{\hspace{2cm}}$ 。

9. 四个正数的和为4，平方和为8，则这四个数中最大的那个数的最大值为_____。
10. 有一个顶点在下且底面呈水平状的圆锥形容器，轴截面是边长为6的正三角形，容器里装满了水，现有一个正四棱柱，底面边长为 a ($a < 6$)，高为 h ($h > 6$)，竖直地浸在容器里，为了使容器溢出的水最多， a 的值应取为_____。
11. 某种商品购买100（包括100）件以下的按零售价结算，购买101（包括101）件以上的按批发价结算。已知批发价每件比零售价低2元，某人原欲购该商品若干件，需按零售价结算付 a 元，但若多买21件，则可按批发价结算恰好也是 a 元（ a 为整数），则 a 的值为_____。
12. 设 $x > 1$ ， $y > 1$ ，则方程 $x + y + \frac{3}{x-1} + \frac{3}{y-1} = 2(\sqrt{x+2} + \sqrt{y+2})$ 的解 $(x, y) =$ _____。

三、解答题（每小题20分）：

13. 在双曲线 $xy=1$ 上，横坐标为 $\frac{n}{n+1}$ 的点为 A_n ，横坐标为 $\frac{n+1}{n}$ 的点为 B_n ($n \in \mathbb{N}$)，记坐标为 $(1,1)$ 的点为 M ， $P_n(x_n, y_n)$ 是 $\triangle A_n B_n M$ 的外心，当 $n \rightarrow \infty$ 时，求 P_n 的极限点的坐标。

14. 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $AB=7$ ， $BC=4$ ， D 是 AC 上一点， $BD=3$ ， $\frac{AD}{DC}=2$ ，求 $\triangle ABC$ 的面积。



15. $f(x)$ 为定义在 $[0,1]$ 上的其值非负的函数，且 $f(1)=1$ ，对定义域中任意两实数 x_1 、 x_2 ，当 $x_1 + x_2 \leq 1$ 时，恒有 $f(x_1 + x_2) \geq f(x_1) + f(x_2)$ 。求证：（1）对定义域中一切 x ，总有 $f(x) \leq 2x$ ；（2）对定义域中的一切 x ， $f(x) \leq 1.9x$ 成立吗？