

## 高中数学联赛培训题（十二）

### 一、选择题（每小题6分）：

1. 已知非零实数  $x, y, z$  成等差数列,  $x+1, y, z$  与  $x, y, z+2$  分别都成等比数列, 则  $y$  的值等于 ( )

A. 8 B. 16 C. 12 D. 20

2. 次射击, 命中3次, 其中恰有2次连续命中的情形的种数为 ( )

A. 15 B. 30 C. 48 D. 60

3. 已知椭圆  $\frac{x^2}{2} + y^2 = 1$  的两个焦点为  $F_1, F_2$ , 过右焦点  $F_2$  作倾斜角为  $\frac{\pi}{4}$  的弦  $AB$ , 则  $\triangle ABF_1$  的面积是 ( )

A.  $\frac{2\sqrt{2}}{3}$  B.  $\frac{4}{3}$  C.  $\frac{4\sqrt{2}}{3}$  D.  $\frac{4\sqrt{3}}{3}$

4. 一个半径为  $a$  的半球内切于顶角为  $90^\circ$  的圆锥, 半球的底面在圆锥的底面内, 则  $V_{\text{半球}} : V_{\text{圆锥}}$  等于 ( )

A.  $\sqrt{2} : 2$  B.  $2 : 1$  C.  $2 : \sqrt{2}$  D.  $1 : 2$

5. 点  $(x, y)$  在直线  $3x + 4y = 1$  上移动, 点  $(u, v)$  满足  $u + vi = \frac{1}{x + yi}$  ( $u, v \in R$ ), 则  $u, v$  满足

的关系式是 ( )

A.  $u^2 + v^2 - 3u + 4v = 0$  B.  $u^2 + v^2 + 3u - 4v = 0$  C.  $u^2 + v^2 = 1$  D.  $(u + \frac{3}{2})^2 + (v - 2)^2 = \frac{25}{4}$

6. 若函数  $f(x)$  和  $g(x)$  在  $R$  上有定义, 且  $f(x-y) = f(x)g(y) - g(x)f(y)$ ,  $f(-2) = f(1) \neq 0$ , 则  $g(1) + g(-1)$  等于 ( )

A. 2 B. 1 C. 0 D. -1

### 二、填空题（每小题9分）：

7. 函数  $y = ax^2 + bx + c$  的图象是开口向下的抛物线,  $a, b, c$  各不相等, 且都在集合

$A = \{n \mid |n| \leq 5, n \in Z\}$  中取值, 则这些抛物线中通过点  $(0, -1)$  的有\_\_\_\_\_条。

8. 已知  $\alpha + \beta = 15^\circ$ , 则  $\frac{1 - \tan \alpha - \tan \beta - \tan \alpha \tan \beta}{1 + \tan \alpha + \tan \beta - \tan \alpha \tan \beta} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

9. 若关于  $x$  的不等式  $\sqrt{9 - x^2} \geq -a^2 x$  的解集的长度为  $\frac{15}{4}$ , 则  $a$  的值是  $\underline{\hspace{2cm}}$ 。

10. 在圆内接四边形  $ABCD$  中,  $\angle A = 60^\circ$ ,  $|AB|$ 、 $|BC|$ 、 $|CD|$ 、 $|DA|$  依次组成等差数列, 且公差  $d = 3 + \sqrt{13}$ 。则  $|AB| = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

11. 设  $x, y \in R^+$ , 且  $\frac{19}{x} + \frac{98}{y} = 1$ , 则  $x + y$  的最小值是  $\underline{\hspace{2cm}}$ 。

12. 在  $\triangle ABC$  中,  $\angle A$ 、 $\angle B$ 、 $\angle C$  所对的边分别为  $a, b, c$ , 若  $c = 10$ ,  $\frac{\cos A}{\cos B} = \frac{b}{a} = \frac{4}{3}$ ,  $P$  为  $\triangle ABC$  的内切圆上的动点,  $d$  为  $P$  到顶点  $A$ 、 $B$ 、 $C$  的距离的平方和, 则  $d_{\min} + d_{\max} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

三、解答题 (每小题 20 分):

13. 设复数  $z_1, z_2, \dots, z_{10}$  为等比数列。已知  $z_1 \neq 1$ ,  $z_2 = z_{10} = 1$ 。求  $z_1$  的模和辐角。

14. 如图, 已知在抛物线  $y = x^2$  上有一个正方形的三个顶点  $A, B, C$ 。求这种正方形面积的最小值。

15. 已知一个数列的各项是 1 或 2。首项为 1, 且在第  $k$  个 1 和第  $k+1$  个 1 之间有  $2^{k-1}$  个 2。即  $1, 2, 1, 2, 2, 1, 2, 2, 2, 2, 1, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 1, \dots$ 。

(1) 求该数列前 1999 项的和  $S_{1999}$ ;

(2) 是否存在正整数  $n$ , 使得数列的前  $n$  项的和  $S_n = 2001$ ? 若  $n$  存在, 求出  $n$  的值; 若  $n$  不存在, 证明你的结论。