不 定 方 程

知识、方法、技能

不定方程是指未知数的个数多于方程的个数，且未知数的取值范围是受某些限制（如整数、正整数或有理数）的方程.不定方程是数论的一个重要课题，也是一个非常困难和复杂的课题.

Ⅰ. 几类不定方程

1．一次不定方程

在不定方程和不定方程组中，最简单的不定方程是整系数方程

$$ax+by+c=0,(a>0,b\neq 0)$$

通常称之为二元一次不定方程.

一次不定方程解的情况有如下定理.

定理一：二元一次不定方程

$ax+by=c,a,b,c$ 为整数.

有整数解的充分必要条件是 $(a,b)\mid c$. ①

【证】必要性 设 x_0,y_0 是①的解，则有 $ax_0+by_0=c$.

设 $d=(a,b)$,则有 $d\mid ax_0,d\mid by_0$,所以有 $d\mid c$.

充分性 设 $d=(a,b)$ 且 $d\mid c$，有 $c=c_1d$.因 $d=(a,b)$，则存在 x_0,y_0，使得

$$d=ax_0+by_0,$$

于是有 $c=c_1d=a\cdot c_1x_0+b\cdot c_1y_0$,

所以 c_1x_0,c_1y_0 是①的解.

显然，当方程①有解时，$d\mid c$. 则用 d 去除①的两端有

$$a_1x+b_1y=c_1 \qquad ②$$

此时，$(a_1,b_1)=1$ 且②与①同解，因此，我们只须讨论 $(a,b)=1$ 时方程①的解.

定理二：若$(a,b)=1$,且x_0,y_0为①之一解，则方程①全部解为

$x=x_0+bt, y=y_0-at$．（t为整数）．

【证】设x_0,y_0为①的一解，则有

$$ax_0+by_0=c \qquad ③$$

设x,y是①的任一解. 用①式减去③式有

$$a(x-x_0)+b(y-y_0)=0.$$

因为$(a,b)=1$, 于是有$b\mid(x-x_0)$，即$x-x_0=bt$.从而有$x=x_0+bt$.将此结果代入上式得$y=y_0-at$.即方程任一解都可以表示为$x=x_0+bt, y=y_0-at$(t为整数）.

反之，若x_0,y_0是①的解，则容易验证$x=x_0+bt, y=y_0-at$均是①的解. 从而定理得证.

2．沛尔($pell$)方程

二元二次不定方程本质上归结为（双曲型）方程

$$x^2-dy^2=c \qquad ④$$

的研究，其中d,c都是整数，$d>0$且非平方数，而$c\neq 0$.方程④的一个特殊情形

$$x^2-dy^2=1 \qquad ⑤$$

最为重要，也最为基础，这称为沛尔方程. 能够证明（本书不予讨论）方程⑤一定有无穷多组正整数解；又设(x_1,y_1)是⑤的正整数解(x,y)中使$x+y\sqrt{d}$最小的解，则⑤的全部正整数解由

$$\begin{cases} x_n=\dfrac{1}{2}[(x_1+\sqrt{d}y_1)^n+(x_1-\sqrt{d}y_1)^n] \\ y_n=\dfrac{1}{2\sqrt{2}}[(x_1+\sqrt{d}y_1)-(x_1-\sqrt{d}y_1)^n] \end{cases} \qquad ⑥$$

给出.（n=1，2，…）

读者不难由⑥导出x_n,y_n满足的线性递推关系

$$\begin{cases} x_n = 2x_1 x_{n-1} - x_{n-2}, \\ y_n = 2x_1 y_{n-1} - y_{n-2} \end{cases} \quad ⑦$$

沛尔方程在数学竞赛中主要用于证明问题有无穷多个解，实际上对具体的 d，可用尝试法求出⑤的一组正整数解 (x_1, y_1)（因为方程一定有解！），无论 (x_1, y_1) 是否为基本解，由⑥均给出方程的无穷多组解.

3．勾股方程 $x^2 + y^2 = z^2$

这是一个相当特殊的三元二次不定方程，它有鲜明的几何意义，并应用广泛.

这里只讨论勾股方程的正整数解，由方程不难看出，如果 $(x, y) = d$，则 $d^2 \mid z^2$，从而 $d \mid z$，这样可在勾股方程的两边约去 d^2．所以我们只需讨论满足 $(x, y) = 1$ 的解，此时易知 x, y, z 实际上两两互素. 这种 x, y, z 两两互素的正整数解 (x, y, z) 称为方程的本原解，也称为本原的勾股数.

将方程模 4，并注意 $(x, y) = 1$，可知 x, y 一奇一偶，无妨设 y 为偶数，下面的结果给出了勾股方程的全部本原解.

定理三：方程 $x^2 + y^2 = z^2$ 满足 $(x, y) = 1$， $z \mid y$ 的全部正整数解 (x, y, z) 可表为

$$x = a^2 - b^2, y = 2ab, z = a^2 + b^2,$$

其中，a, b 是满足 $a > b > 0, a, b$ 一奇一偶，且 $(a, b) = 1$ 的任意整数.

证明从略.

4．不定方程 $xy = zt$

这是个四元二次方程，此方程也有不少用处，其全部正整数解极易求出：

设 $(x, z) = a$，则 $x = ac, z = ad$，其中 $(c, d) = 1$，故 $acy = adt$,即$cy = dt$,因$(c, d) = 1$，

所以 $d \mid y$,设 $y = bt$,则 $t = bc$．因此方程 $xy = zt$ 的正整数解可表示为

$x = ac, y = bd, z = ad, t = bc$.$a, b, c, d$ 都是正整数，且 $(c, d) = 1$.反过来，易知上述给出的 x, y, z, t 都是解.

也可采用如下便于记忆的推导：

设 $\frac{x}{z} = \frac{t}{y} = \frac{c}{d}$,这里 $\frac{c}{d}$ 是既约分数，即 $(c, d) = 1$．由于 $\frac{x}{z}$ 约分后得出 $\frac{c}{d}$，故

$x=ac, z=ad$，同理 $t=cb, y=ab.$

Ⅱ. 不定方程一般的求解方法

1．奇偶分析法；

2．特殊模法；

3．不等式法；

4．换元法.

由于不定方程的种类和形式的多样性，其解法也是多种的，上面仅是常用的一般方法.