不 定 方 程 (续 1)

赛题精讲

例 1：求方程$|p^r-q^s|=5$的整数解，其中p,q是质数，r,s是大于 1 的正整数，并证明你所得到的解是全部解. （第 37 届美国普特南数学竞赛试题）

【解】由p和q,r和s的对称性，不妨设$p^r>q^s$，即不妨只考试方程$p^r-q^s=1$①的整数解p，q,r，s仍如题设）.

显然，①中p,q不能全为奇质数，且$p\neq q$，故p,q中恰有一个等于偶质数 2.

（1）若$p=2$，此时设$q=2q_1+1$.如果$s=2s_1$是偶数，则

$q^s+1=(2q_1+1)^{2s_1}+1=2+4k(k$为正整数）不能被 4 整除，而$p^r=2^r(r>1)$能被 4 整除，①不成立，故$s$只能取奇数值.于是$s\geq 3$，此时，$p^r=2^r=q^s+1=(q+1)(q^{s-1}-q^{s-2}+\cdots-q+1)$，故$q+1$只含素因子 2.

设$q+1=2^t(t\geq 2)$，则$2^r=q^s+1=(2^t-1)^s+1=2^t(s-C_s^2\cdot 2t+\cdots)$.

由于$(s-C_s^2\cdot 2t+\cdots)$与s的奇偶性相同，即为奇数，故只能等于 1，这样一来$t=r$，从而方程①$2^r-(2^r-1)^s=1$，得$s=1$，这与题设$s>1$矛盾，故①中p不能取值 2.

（2）若$q=2$，则由①得$2^s=p^r-1=(p-1)(p^{r-1}+p^{r-2}+\cdots+1)$，故$p-1$只含素因子 2.设$p-1=2^t(t\geq 1),r=2^u\cdot r_1(u\geq 0,r_1$为奇数),则

$2^s=(2^t+1)^r-1=2^{t+u}(r_1+r_1(r-1)\cdot 2^{t-1}+\cdots)$,若$t\geq 2$,则$r_1+r_1(r-1)\cdot 2^{t-1}+\cdots$是大于 1 的奇数,上式不能成立,故$t=1$,即$p=3$.这时由方程①得

$$2^s=3^r-1=(4-1)^r-1=(-1)^r+C_r^1(-1)^{r-1}\cdot 4+C_r^1(-1)^{r-2}\cdot 4^2+\cdots-1.$$

若r是奇数，显然上式不成立；若$r\geq 4$是偶数，则上式右边等于$-4r+8r$（$r-1$）$-\cdots=-4r[1-2$（$r-1$）$+\cdots]$，而$[1-2$（$r-1$）$+\cdots]$不是偶数，因而只能等于-1，故$2^s=3^r-1=4r$,显然$r\geq 4$时此式不成立，于是$r=2$，进而由$2^s=3^2-1=8$得$s=3$，从而方程①的解只能是$p=3,q=2,r=2,s=3$.

综上，考察到对称性，原方程恰有两组解：

$$\begin{cases} p=3, \\ q=2, \\ r=2, \\ s=3. \end{cases} \qquad \begin{cases} p=2, \\ q=3, \\ r=3, \\ s=2. \end{cases}$$

例 2：试证：当$2<n<11$时，不存在n个连续自然数，使得它们的平方和是完全平方数.

【证明】设x是非负整数.假若结论不成立,即存在$y\in N$使

$(x+1)^2+(x+2)^2+\cdots+(x+n)^2=y^2$,即

$nx^2+n(n+1)x+\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)=y^2$ ①

记$A=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$. 则$y^2\equiv A(\bmod n)$.

当$n=3,4,9$时，分别由① 和$n\mid y$.令$y=nz$，代入①得

$$x^2+(n+1)x+\frac{1}{6}(n+1)(2n+1)=nz^2,$$

即$(x+\frac{n+1}{2})^2+\frac{1}{12}(n^2-1)=nz^2$.

把$n=5,7$代入后将分别得到$(x+3)^2+2\equiv 0(\bmod 5)$, $(x+4)^2+3\equiv 0(\bmod 7)$.但这是不可能的，故$n\neq 5,7$.

当$n=6,8,10$时,由①得$(n+1)[x^2+nx+\frac{1}{6}n(2n+1)]=x^2+y^2$ ②

若 $n=6$, 则由②知，$x^2+y^2\equiv 0(\bmod 7)$，由于x的任意性，所以只能有$x^2\equiv 0,1,2,40(\bmod 7)$因此要使$x^2+y^2\equiv 0(\bmod 7)$成立,只能$x\equiv 0, y\equiv 0(\bmod 7)$,于是由③知有$7^2\mid \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)=7\times 13$,这是不可能的,故$n\neq 6$.同理可证$n\neq 10$.

若$n=8$,则由②可得$x^2+y^2=9x^2+8\times 9x+\frac{1}{6}\times 8\times 9\times 17\equiv 204\equiv 6(\bmod 9)$,这是不可能的,故$n\neq 8$.综上,命题得证.

【评述】 $n=11$时,有$38^2+39^2+\cdots+48^2=143^2$.

例 3：试求所有的正整数n，使方程$x^3+y^3+z^3=nx^2y^2z^2$有正整数解.

(1987年中国国家队选拔考试题)

【解】设 x,y,z 为其正整数解,由对称性,不妨设 $x\le y\le z$.显然， $z^2\mid x^3+y^3$, 故 $z^2\le x^3+y^3$.但 $x^3\le xz^2, y^3\le yz^2$，因而

$$z=nx^2y^2-\frac{x^3+y^3}{2}\ge nx^2y^2-(x+y),$$

故 $x^3+y^3\ge z^2\ge[nx^2y^2-(x+y)]^2$.

于是 $n^2x^4y^4\le 2nx^2y^2(x+y)+x^3+y^3$,

$$xy<2(\frac{1}{x}+\frac{1}{y})+\frac{1}{nx^3}+\frac{1}{ny^3}.$$

易知 $n=1$（否则，若 $x\ge 2$，则上式端不小于 4，右端不大于 3，矛盾），这样上式转化为 $y<2+\frac{2}{y}+\frac{1}{ny^3}$.此式只有 $y\le 3$ 时才能成立.当注意到 $z^2\mid x^3+y^3$,即 $z^2\mid 1+y^3$.因此，只能是 $y=1,z=1$ 或 $y=2,z=3$($y=3,z=2$ 时不合 $z\ge y$）.把所得的解代入原方程就可得 $n=3$ 或 1.

例 4：在无限方格纸（方格的边长为 1）上仅可沿网格线作划分，求证：对于任一整数 $m>12$，可以划分出这样的矩形，它的面积大于 m，而从其中不可能再分出面积等于 m 的矩形.

(1985年第19届全苏数学竞赛试题)

【证明】设某一矩形边长为 $x,y\in N^*$.不失一般性,设 $x\le y$.由题意， x、 y 应满足：$xy>m,(x-1)y<m,x(y-1)<m.$ 但由于 $x\le y$ 知 $(x-1)y\le x(y-1)$,于是只要证明不等式组：

$$xy>m,x(y-1)<m,x\le y \qquad ①$$

有正整数解就可以了.

由于对任一正整数 m ,必定有 $k^2\le m<(k+1)^2(k\in N^*)$,所以可分下面四种情形讨论：

（1）当 $m=k^2$ 时，①有解 $x=k-1,y=k+2;$

（2）当 $k^2<m<k(k+1)$ 时，①有解 $x=k,y=k+1;$

（3）当 $m=k(k+1)$ 时，①有解 $x=k-1,y=k+3;$

（4）当 $k(k+1)<m<(k+1)^2$ 时，①有解 $x=k+1, y=k+1$.

例 5：求方程 $\dfrac{x+y}{x^2-xy+y^2}=\dfrac{3}{7}$ 的所有整数解.

(1986 年第 12 届全国数学竞赛试题)

【解】因为 $x^2-xy+y^2=\dfrac{1}{4}[(x+y)^2+3(x-y)^2]$.

若令 $x+y=p, x-y=q$, 则原方程可化为 $28p=3(p^2+3q^2)$.

由此可看出 $p>0$ 且 p 是 3 原倍数.设 $p=3k$, 其中 k 是正整数，则 $28p=3(3p^2+q^2)$，于是 $k>0$ 且 k 是 3 的倍数.设 $k=3m$ （其中 $m\in N$），则 $28m=27m^2+q^2$. 再由 $28m-27m^2=q^2\geq 0$ 知 $m=1$.此时，$k=3, p=9, q=\pm 1$，故可由方程组 $\begin{cases} x+y=9, \\ x-y=\pm 1. \end{cases}$

解得原方程的整数解 $(x,y)=(5,4),(4,5)$.