第十二讲　高斯函数

知识、方法、技能

函数 $y=[x]$，称为高斯函数，又称取整函数.它是数学竞赛热点之一.

定义一：对任意实数 x，$[x]$ 是不超过 x 的最大整数，称 $[x]$ 为 x 的整数部分.与它相伴随的是小数部分函数 $y=\{x\},\{x\}=x-[x].$

由 $[x]$、$\{x\}$ 的定义不难得到如下性质：

（1） $y=[x]$ 的定义域为 R，值域为 Z； $y=\{x\}$ 的定义域为 R，值域为 $[0,1)$

（2）对任意实数 x，都有 $x=[x]+\{x\}$, 且 $0\le\{x\}<1$.

（3）对任意实数 x，都有 $[x]\le x<[x]+1, x-1<[x]\le x$.

（4） $y=[x]$ 是不减函数,即若 $x_1\le x_2$,则 $[x_1]\le[x_2]$; $y=\{x\}$ 是以 1 为周期的周期函数

（5） $[x+n]=n+[x];\{x+n\}=\{x\}$.其中 $x\in R,n\in N^*$.

（6） $[x+y]\ge[x]+[y];\{x\{x\}+\{y\}\ge\{x+y\};[\sum_{i=1}^{n}x_i]\ge\sum_{i=1}^{n}[x_i],x_i\in R$；特别地，$[\frac{na}{b}]\ge n[\frac{a}{b}]$.

（7） $[xy]\ge[x]\cdot[y]$，其中 $x,y\in R_+$；一般有 $[\prod_{i=1}^{n}x_i]\ge\sum_{i=1}^{n}[x_i],x_i\in R_+$；特别地，$[\sqrt[n]{x}]^n\le[x],x\in R+,n\in N^*$.

（8） $[\frac{x}{n}]=[\frac{[x]}{n}]$，其中 $x\in R^+,n\in N^*$.

【证明】（1）—（7）略.

（8）令 $[\frac{x}{n}]=m,m\in Z$，则 $m\le\frac{x}{n}\le m+1$，因此，$nm\le x<n(m+1)$.由于 nm，$n(m+1)\in N$，则由(3)知，$nm\le[x]<n(m+1)$, 于是 $m\le\frac{[x]}{n}<m+1$, 故 $[\frac{[x]}{n}]=m$. 证毕.

取整函数或高斯函数在初等数论中的应用是基于下面两个结论.

定理一： $x\in R+,n\in N^*$，且 1 至 x 之间的整数中，有 $[\frac{x}{n}]$ 个是 n 的倍数.

【证明】因$[\frac{x}{n}]\le\frac{x}{n}<[\frac{x}{n}]+1$，即$[\frac{x}{n}]\cdot n\le x<([\frac{x}{n}]+1)\cdot n$，此式说明：不大于 x 而是 n 的倍数的正整数只有这$\frac{[x]}{n}$个：$n,2n,\cdots,[\frac{x}{n}]\cdot n.$

定理二：在n！中，质数 p 的最高方次数是 $p(n!)=[\frac{n}{p}]+[\frac{n}{p^2}]+[\frac{n}{p^3}]+\cdots.$

【证明】由于 p 是质数，因此$n!$含 p 的方次数 $p(n!)$ 一定是 1，2，…，$n-1,n$ 各数中所含 p 的方次数的总和.由定理一知，1，2，…，n 中有$[\frac{n}{p}]$个 p 的倍数，有$[\frac{n}{p^2}]$个 p^2 的倍数，…，所以 $p(n!)=[\frac{n}{p}]+[\frac{n}{p^2}]+\cdots.$

此定理说明：$n!=p^{p(n!)}\cdot M$，其中 M 不含 p 的因数.例如，由于+⋯=285+40+5=330，则 2000！=7^{330} • M，其中$7\nmid M$.

定理三：（厄米特恒等式） $x\in R,n\in N,$则$[x]+[x+\frac{1}{n}]+[x+\frac{2}{n}]+\cdots+[x+\frac{n-1}{n}]=[nx]$

【证法 1】引入辅助函数

$f(x)=[nx]-[x]-[x+\frac{1}{n}]-[x+\frac{2}{n}]-\cdots-[x+\frac{n-2}{n}]-[x+\frac{n-1}{n}].$因 $f(x+\frac{1}{n})=\cdots$ $=f(x)$ 对一切 $x\in R$ 成立，所以 $f(x)$ 是一个以$\frac{1}{n}$为周期的周期函数，而当 $x\in[0,\frac{1}{n}]$时，直接计算知 $f(x)=0$，故任意 $x\in R$，厄米特恒等式成立.

【证法 2】等式等价于 $n[x]+[\{x\}]+[\{x\}+\frac{1}{n}]+\cdots+[\{x\}+\frac{n-1}{n}]=n[x]+[n\{x\}]$.消去 $n[x]$ 后得到与原等式一样的等式，只不过是对 $x\in[0,1)$，则一定存在一个 k 使得 $\frac{k-1}{n}\le x<\frac{k}{n}$，即$(k-1)\le nx<k$，故原式右端$=[nx]=k-1$.另一方面，由$\frac{k-1}{n}\le x<\frac{k}{n}$知，$\frac{k}{n}\le x+\frac{1}{n}<\frac{k+1}{n},\frac{k+1}{n}\le x+\frac{2}{n}<\frac{k+2}{n},\cdots,\frac{k+i}{n}\le x<\frac{k+i+1}{n},\cdots,\frac{k+n-2}{n}\le x<\frac{k+n-1}{n}$，在这批不等式的右端总有一个等于 1，设$\frac{k+t}{n}=1$，即$t=n-k$. 这时，$[x]=[x+\frac{1}{n}]=\cdots=[x+\frac{n-k}{n}]=0$，而$[x+\frac{n-k+1}{n}]=\cdots=[x+\frac{n-1}{n}]=1$，因此原式的左端是$k-1$个 1 之和，即左端$=k-1$.故左=右.

【评述】证法 2 的方法既适用于证明等式，也适用于证明不等式.，这个方法是：第一步“弃整”，把对任意实数的问题转化为$[0,1)$的问题；第二步对$[0,1)$分段讨论.

高斯函数在格点（又叫整点）问题研究中有重要应用. 下面给出一个定理.

定理四：设函数 $y=f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续而且非负，那么和式 $\sum\limits_{a<t\le b}[f(t)]$（$t$ 为 $[a,b]$ 内的整数）表示平面区域 $a<x\le b, 0<y\le f(x)$ 内的格点个数.特别地，有

（1）位于三角形：$y=ax+b>0, c<x\le d$ 内的格点个数等于 $\sum\limits_{c<x\le d}[ax+b]$（且 x 为整数）；

（2）$(p,q)=1$，矩形域 $[0,\frac{q}{2};0,\frac{p}{2}]$ 内的格点数等于

$$\sum_{0<x<q/2}[\frac{p}{q}x]+\sum_{0<y<p/2}[\frac{q}{p}y]=\frac{p-1}{2}\cdot\frac{q-1}{2}.$$

（3）$r>0$，圆域 $x^2+y^2\le r^2$ 内的格点个数等于

$$1+4[r]+8\sum_{0<x\le r/\sqrt{2}}[\sqrt{r^2-x^2}]-4[\frac{r}{\sqrt{2}}]^2 .$$

（4）$n>0$，区域：$x>0, y>0, xy\le n$ 内的格点个数等于

$$2\sum_{0<x<\sqrt{n}}[\frac{n}{x}]-[\sqrt{n}]^2 .$$

这些结论通过画图即可得到.