高 斯 函 数 （续）

例 1：求证：$2^{n-1} n! \Leftrightarrow n=2^{k-1}$，其中 k 为某一自然数.

（1985 年第 17 届加拿大数学竞赛试题）

[证明]2 为质数，n!中含 2 的方次数为

$$2(n!)=\sum_{t=1}^{\infty}[\frac{n}{2^t}].$$

$$若\ n=2^{k-1},则2(n!)=\sum_{t=1}^{\infty}[2^{k-t-1}]=\sum_{t=1}^{k-1}[2^{k-t-1}]=1+2+2^2+\cdots+2^{k-2}=2^{k-1}-1=n-1$$

故 $2^{n-1} \mid n!$.

反之，若 n 不等于 2 的某个非负整数次幂，可设 n=$2^s p$，其中 p>1 为奇数，这时总可以找出整数 t，使$2^t<2^s p<2^{t+1}$，于是$n!$中所含2的方次数为$2(n!)=[2^{s-1}p]+[2^{s-2}p]+\cdots+$

$$[2^{s-t}p]+0+\cdots\le[(2^{s-1}+2^{s-2}+\cdots+2^{s-t})p]=[2^{s-t}(2^t-1)p]=[2^s p-2^{s-t}p]=n+[-2^{s-t}p].$$

由于$1<2^{s-t}p<2$，则$[-2^{s-t}]=-2$，故$n!$中含2的方次数$2(n!)\le n-2$，则$2^{n-1}\nmid n!$.这与已知矛盾，故必要性得证.

例 2：对任意的$n\in N^*$，计算和$S=\sum_{K=0}^{\infty}[\frac{n+2^k}{2^{k+1}}]$.　　（第 10 届 IMO 试题）

【解】因$[\frac{n+2}{2^{k+1}}]=[\frac{n}{2^{k+1}}+\frac{1}{2}]$对一切 k=0,1,⋯成立，因此，$[\frac{n}{2^{k+1}}+\frac{1}{2}]=[2\cdot\frac{n}{2^{k+1}}]-[\frac{n}{2^{k+1}}]$.

又因为 n 为固定数，当 k 适当大时，$\frac{n}{2^k}<1$，从而$[\frac{n}{2^k}]=0$，故$S=\sum_{K=0}^{\infty}([\frac{n}{2^k}]-[\frac{n}{2^{k+1}}])=\cdots=n$.

例 3：计算和式 $S=\sum_{n=0}^{502}[\frac{305n}{503}$的值.（1986 年东北三省数学竞赛试题）

【解】显然有：若$\{x\}+\{y\}=1$，则$[x+y]=[x]+[y]+1$，$x,y\in R$.

503 是一个质数，因此，对 n=1,2,⋯,502，$\frac{305n}{503}$都不会是整数，但$\frac{305n}{503}+\frac{305(503-n)}{503}=305$,

可见此式左端的两数的小数部分之和等于 1，于是，$[\frac{305n}{503}]+[\frac{305(503-n)}{503}]=304.$故

$$S=\sum_{n=1}^{502}[\frac{305n}{503}]=\sum_{n=1}^{251}([\frac{305n}{503}]+[\frac{305(503-n)}{503}]),=304\times 251=76304.$$

例 4：设 M 为一正整数，问方程 $x^2-[x]^2=\{x\}^2$，在[1，M]中有多少个解？

（1982 年瑞典数学竞赛试题）

【解】显然 x=M 是一个解,下面考察在[1，M]中有少个解.

设 x 是方程的解.将 $x^2=[x]^2+2\{x\}\cdot\{x\}+\{x\}^2$ 代入原方程，化简得 $2[x]\{x\}=$

$[2[x]\{x\}+\{x\}^2]$.由于 $0\le\{x\}<1$,所以上式成立的充要条件是 $2[x]\{x\}$为一个整数.

设$[x]=m\in N$,则必有$\{x\}=\frac{k}{2m}(k=0,1,\cdots,2m-1)$,即在$[m,m+1)$中方程有$2m$个解.
又由于$1\le m\le M-1$,可知在$[1,M)$中方程有$2(1+2+\cdots+(M-1))=M\cdot(M-1)$个解.
因此,原方程在$[1,M]$中有$M(M-1)+1$个解.

例 5：求方程 $4x^2-40[x]+51=0$ 的实数解（第 36 届美国数学竞赛题）

【解】因 $[x]\le x<[x]+1$, 又 $[x]<0$ 不是解

$$\therefore\begin{cases}4([x]+1)^2-40[x]+51>0,\\4[x]^2-4[x]+51\le 0.\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}(2[x]-5)(2[x]-11)>0.\\(2[x]-3)(2[x]-17)\le 0.\end{cases}$$

$$\begin{cases}[x]<\frac{5}{2},\\[x]\ge\frac{3}{2},\text{或}\\[x]\le\frac{17}{2};\end{cases}\begin{cases}[x]>\frac{11}{2},\\[x]\ge\frac{3}{2},\\[x]\le\frac{17}{2}.\end{cases}$$

解得$[x]=2$或$[x]=6$或7或8,分别代入方程得:

$$4x^2-29=0,x=\frac{\sqrt{29}}{2};4x^2-189=0,x=\frac{\sqrt{189}}{2};$$

$$4x^2-229=0,x=\frac{\sqrt{229}}{2};4x^2-269=0,x=\frac{\sqrt{269}}{2}.$$

经检验知，这四个值都是原方程的解.

例 6：$x\in R+,n\in N^*$, 证明 $[nx]\ge\frac{[x]}{1}+\frac{[2x]}{2}+\frac{[3x]}{3}+\cdots+\frac{[nx]}{n}.$

（第 10 届美国数学竞赛试题）

这道题的原解答要极为复杂，现用数学归纳法证明如下.

【证明】 令$A_k=[x]+\frac{[2x]}{2}+\cdots+\frac{[kx]}{k},k=1,2,\cdots.$

由于 $A_1=[x]$,则$n=1$时,命题成立.

设$n\le k-1$时命题成立,即有$A_1\le[x],A_2\le[2x],\cdots,A_{k-1}\le[(k-1)x]$.因为,

$A_k-A_{k-1}=\frac{[kx]}{k}$,即$kA_k-kA_{k-1}=[kx]$对一切$k$成立,所以$kA_k-kA_{k-1}=[kx],(k-1)$

$A_{k-1}-(k-1)A_{k-2}=[(k-1)x],\cdots,2A_2-2A_1=[2x],A_1=[x]$.相加得:

$kA_k-(A_1+A_2+\cdots+A_{k-1})=[x]+[2x]+\cdots+[(k-1)x]+[kx]$

故$kA_k=[x]+[2x]+\cdots+[(k-1)x]+[kx]+A_{k-1}+A_{k-2}+\cdots+A_2+A_1$

$\le[x]+[2x]+\cdots+[(k-1)x]+[kx]+[(k-1)x]+[(k-2)x]+\cdots+[2x]+[x]$

$=([x]+[(k-1)x]+([2x]+[(k-2)x])+\cdots+([(k-1)x]+[x])+[kx]\le[kx]+[kx]+\cdots[kx]+[kx]$

$=k[kx]$

$\therefore A_k\le[kx]$,即$n=k$时,命题成立,故原不等式对一切$n\in N^*$均成立,证毕.

例 7：对自然数 n 及一切自然数 x，求证：

$[x]+[x+\frac{1}{n}]+[x+\frac{2}{n}]+\cdots+[x+\frac{n-1}{n}]=[nx]$.（苏联数学竞赛题）

【证明】 $x=[x]+\{x\}$，则

$$[x]+[x+\frac{1}{n}]+[x+\frac{2}{n}]+\cdots+[x+\frac{n-1}{n}]$$

$$=[[x]+\{x\}]+[[x]+\{x\}+\frac{1}{n}]+[[x]+\{x\}+\frac{2}{n}]+\cdots+[[x]+\{x\}+\frac{n-1}{n}]$$

$$=[x]+[\{x\}]+[x]+[\{x\}+\frac{1}{n}]+[x]+[\{x\}+\frac{2}{n}]+\cdots+[x]+[\{x\}+\frac{n-1}{n}],$$

$$=n[x]+[\{x\}]+[\{x\}+\frac{1}{n}]+[\{x\}+\frac{2}{n}]+\cdots+[\{x\}+\frac{n-1}{n}].$$

$[nx]=[n[x]+n\{x\}]=n[x]+[n\{x\}]$,故只要证明

$[\{x\}]+[\{x\}+\frac{1}{n}]+[\{x\}+\frac{2}{n}]+\cdots+[\{x\}+\frac{n-1}{n}]=[n\{x\}]$即可.

设存在$k, 1\le k\le n$,使$\{x\}+\frac{k}{n}\ge 1$,而$\{x\}+\frac{k-1}{n}<1$,则

$$[\{x\}]+[\{x\}+\frac{1}{n}]+[\{x\}+\frac{2}{n}]+\cdots+[\{x\}+\frac{k-1}{n}]+[\{x\}+\frac{k}{n}]+\cdots+[\{x\}+\frac{n-1}{n}]=n-k.$$

由$\{x\}+\frac{k}{n}\ge 1$及$\{x\}+\frac{k-1}{n}<1$知$n\{x\}\ge n-k$,且$n\{x\}<n-k+1$.故知$[n\{x\}]=n-k$.知

$$[\{x\}]+[\{x\}+\frac{1}{n}]+[\{x\}+\frac{2}{n}]+\cdots+[\{x\}+\frac{n-1}{n}]=[n\{x\}].$$从而有

$$[x]+[x+\frac{1}{n}]+[x+\frac{2}{n}]+\cdots+[x+\frac{n-1}{n}]=[nx].$$

例 8：求出$[\frac{10^{20000}}{10^{100}+3}]$的个位数字.（第 47 届美国普特南数学竞赛试题）

【解】先找出$\frac{10^{20000}}{10^{100}+3}$的整数部分与分数部分.

$$\frac{10^{20000}}{10^{100}+3}=\frac{(10^{100})^{200}-3^{200}}{10^{100}+3}+\frac{3^{200}}{10^{100}+3}$$

$(10^{100})^{200}-3^{200}=[(10^{100})^2]^{100}-(3^2)^{100}$,知$(10^{100})^2-3^2\mid 10^{20000}-3^{200}$

又$10^{100}+3\mid(10^{100})^2-3^2$,知$\frac{10^{20000}-3^{200}}{10^{100}+3}$是整数。

显然$\frac{3^{200}}{10^{100}+3}=\frac{9^{100}}{10^{100}+3}<1$,知$[\frac{10^{20000}}{10^{100}+3}]=\frac{10^{2000}-3^{200}}{10^{100}+3}=\frac{10^{20000}-9^{100}}{10^{100}+3}=\frac{10^{20000}-81^{50}}{10^{100}+3}$.

其中分母的个位数字为 3，分子的个位数字为 9，故商的个位数字为 3.