集合与映射（续 2）

例 7：设 oxyz 是空间直角坐标系，S 是空间中的一个有限点集，S_x，S_y，S_z 分别是 S 中所有点的坐标平面 oyz，ozx，oxy 上的正投影所成的集合.

求证 $|S|^2 \le |S_x|\cdot|S_y|\cdot|S_z|$.　　（1992 年 IMO 试题 5）

【证明】对每点 $(i,j)\in S_x$，令 $T_{ij}=\{(x,i,j)\,|\,(x,i,j\}\in S\}$，显然有 $S=\sum\limits_{(i,j)\in S_{ix}} T_{ij}$

由柯西不等式有 $|S|^2 \le \sum\limits_{(i,j)\in S_x}\cdot\sum\limits_{(i,j)\in S_x} 1\cdot|T_{ij}|^2 = |S_x|\cdot\sum\limits_{(i,j)\in S_x}|T_{ij}|^2$　　①

考虑集合 $V=\sum\limits_{(i,j)\in S_x}(T_{ij}\times T_{ij})$, 其中 $T_{ij}\times T_{ij}=\{(t_1,t_2)\,|\,t_1,t_2\in T_{ij}\}$,

显然，$|V|=\sum\limits_{(i,j)\in S_x}|T_{ij}|^2$

定义映射 f 如下

$V \ni (x,i,j),(x',i,j)\to((x,j),(x',i))\in S_y\times S_z$，不难看出 f 为单射，因此有

$|V|\le|S_y|\cdot|S_z|$

由①、②即得 $|S|^2\le|S_x|\cdot|S_y|\cdot|S_z|$.

例 8：设集合 $A=\{1,2,\cdots,10\}$, A 到 A 的映射 f 满足下列两个条件：

①对任意 $x\in A,\ f_{30}(x)=x$;

②对每个 $k\in Z_+, 1\le k\le 29$, 至少存在一个 $a\in A$，使得 $f_k(a)\ne a$.

求这样的映射的总数.　　(1992 年日本奥林匹克预选赛题)

【解】注意到 10=5+3+2，30=5×3×2.这提示我们将 A 划分成三个不相交的子集

$A=\{a_1,a_2,a_3,a_4,a_5\}\cup\{b_1,b_2,b_3\}\cup\{c_1,c_2\}$.

因为 f 满足条件①和②，所以 f 是 A 到 A 上的双射，并且由定理 2 的证明过程得知 A 中存在映射圈，因此，定义映射

$f: f(a_1)=a_2, f(a_2)=a_3, f(a_3)=a_4, f(a_4)=a_5, f(a_5)=a_1; f(b_1)=b_2, f(b_2)=b_3,$

$f(b_3)=b_1; f(c_1)=c_2, f(c_2)=c_1.$

因为 30 是 5、3、2 的最小公倍数，故由定理 2 和定理 3 知 f 是满足题目条件①和②惟一的一类映射.

因此，f 的总数目相当于从 10 个元素中选取 5 个，再从剩下的 5 个中选取 3 个，最后剩下的两个也选上，它们分别作圆排列的数目，它等于$(C_{10}^{5}\cdot 4!)(C_5^3\cdot 2!)(C_2^2\cdot 1!)=120960$.

例 9：设集合 A={1，2，3，4，5，6}，映射 $f:A\to A$,其三次复合映射 $f\circ f\circ f$ 是恒等映射，这样的 f 有多少个？　　　　（1996 年日本数学奥林匹克预选赛题）

【解】因为集合 A 上的三次复合映射是恒等映射，所以定理 2 和定理 3 推知符合条件的映射 f 有三类：

（1） f 是恒等映射；

（2）A 中存在一个三元映射圈 $a\to b\to c\to a$ （a,b,c 互异），而其他三个元素是不动点；

（3）A 中存在两个三元映射圈 $a\to b\to c\to a$ 和 $a'\to b'\to c'\to a'$（a,b,c,a',b',c' 互异）

类型（1）的 f 只有 1 个.

对于类型（2），先从 6 个元素中选出 3 个元素 a,b,c的方法有$C_6^3=20$ 种，又 a、b、c 作圆排列有（3—1）！=2 种，故这样的 f 有 20×2=40 个.

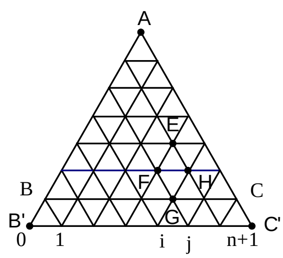
对于类型（3），首先 6 个元素平分成两组有 $C_6^3\div 2=10$ 种分法，每组分别作圆排列又有（3—1）！(3—1）！=4 种方式，所以这样的 f 有 10×4=40 个.

综上所述，所求的 f 有 1+40+40=81 个.

例 10：把正三角形 ABC 的各边 n 等分，过各分点在△ABC 内作各边的平行线，得到的图形叫做正三角形 ABC 的 n 格点阵.

（1）求其中所有边长为$\dfrac{1}{n}|BC|$的菱形个数；

（2）求其中所有平行四边形的个数.　　　　（1988 年国家集训队选拔考试题）



【解】延长 AB 至 B', AC 至 C'，使得$|BB'|=|CC'|=\dfrac{1}{n}|BC|$.作出正三角形 $AB'C'$ 的 n+1 格点阵(如图).边 $B'C'$ 上有 $n+2$ 个点，依次编码为 0，1，2，…，n+1.

在△ABC 中边长为$\dfrac{1}{n}$|BC|的菱形可以按边不平行于 BC、AC 与 AB 分为三类.容易看出，这三类中菱形个数相同.边不平行 BC 且

边长为$\frac{1}{n}$|BC|的所有菱形集合记作 S.由正整数 1，2，⋯，n 组成的所有有序的数对（i,j）,i<j 所构成的集合记作 T.很明显，$|T|=C_n^2$,设菱形 EFGH$\in$S，延长它的两条邻边 HG 与 GF，分别交$B'C'$与点i与 j，$1\le i< j\le n$。则$(i,j)\in T$.令（i,j）是菱形 EFGH 在 S 到 T 的映射φ下的像，这样便建立了 S 到 T 的映射φ.容易验证，映射φ是双射.因此，$|S|=|T|=C_n^2$,所以所求的边长为$\frac{1}{n}$|BC|的菱长个数为 $3C_n^2$.

其次，将平行四边形按边不平行于 BC、AC 与 AB 分为三类，这三类的平行四边形个数应相同，边不平行 BC 的所有平行四边形集合记作 V.非负整数 0,1,2,⋯,n+1 构成的所有有序四元数组（i,j,k,l）,$0\le i< j<k<l\le n+1$构成的集合记作 W.很明显，$|W|=C_{n+2}^4$.设α是 V 中平行的四边形，延长它的四条边分别交$B'C'$于点i,j,k,l，其中$0\le i< j<k<l\le n+1$，则$\beta=(i,j,k,l)\in W$.令β是α在V到W的映射φ下的像.这样便定义了 V 到 W 的一个映射φ.容易验证，φ是双射.因此，$|V|=|W|=C_{n+2}^4$.从而所求平行四边形的个数为$3C_{n+2}^4$.