奇数、偶数、质数、合数（一）

知识、方法、技能

Ⅰ.整数的奇偶性

将全体整数分为两类，凡是 2 的倍数的数称为偶数，否则称为奇数.因此，任一偶数可表为 $2m$（m∈Z），任一奇数可表为 $2m+1$ 或 $2m-1$ 的形式.奇、偶数具有如下性质：

（1）奇数±奇数=偶数；偶数±偶数=偶数；
奇数±偶数=奇数；偶数×偶数=偶数；
奇数×偶数=偶数；奇数×奇数=奇数；

（2）奇数的平方都可表为 $8m+1$ 形式，偶数的平方都可表为 $8m$ 或 $8m+4$ 的形式（m∈Z）.

（3）任何一个正整数 n，都可以写成 $n=2^m l$ 的形式，其中 m 为非负整数，l 为奇数.

这些性质既简单又明显，然而它却能解决数学竞赛中一些难题.

Ⅱ.质数与合数、算术基本定理

大于 1 的整数按它具有因数的情况又可分为质数与合数两类.

一个大于 1 的整数，如果除了 1 和它自身以外没有其他正因子，则称此数为质数或素数，否则，称为合数.

显然，1 既不是质数也不是合数；2 是最小的且是惟一的偶质数.

定理：（正整数的惟一分解定理，又叫算术基本定理）任何大于 1 的整数 A 都可以分解成质数的乘积，若不计这些质数的次序，则这种质因子分解表示式是惟一的，进而 A 可以写成标准分解式：

$$A=p_1^{\alpha_1}\cdot p_2^{\alpha_2}\cdots p_n^{\alpha_n} \qquad (*).$$

其中 $p_1<p_2<\cdots<p_n, p_i$ 为质数，α_i 为非负整数，i=1，2，…，n.

【略证】由于 A 为一有限正整数，显然 A 经过有限次分解可分解成若干个质数的乘积，把相同的质因子归类整理可得如（*）的形式（严格论证可由归纳法证明）.余下只需证惟一性.

设另有 $A=q_1^{\beta_1}\cdot q_2^{\beta_2}\cdots q_n^{\beta_m}$,其中$q_1<q_2<\cdots<q_m, q_j$ 为质数，β_i 为非负整数，j=1，2，…，m.由于任何一 p_i 必为 q_j 中之一，而任一 q_j 也必居 p_i 中之一，故 n=m.又因 $p_1<p_2<\cdots<p_n, q_1<q_2\cdots<q_n$,则有$p_i=q_i(i=1,2,\cdots,n)$，再者，若对某个 i，$\alpha_i\neq\beta_i$

（不妨设$\alpha_i > \beta_i$），用 $p_i^{\beta_i}$ 除等式 $p_1^{a_2} p_2^{a_1} \cdots p_n^{a_n} = p_1^{\beta_1} \cdot p_2^{\beta_2} \cdots p_n^{\beta_n}$ 两端得：

$$p_1^{\alpha_1} \cdots p_i^{\alpha_i - \beta_i} \cdots p_n^{\varepsilon_n} = p_1^{\beta_1} \cdots p_{i-1}^{\beta_{i-1}} \cdot p_{i+1}^{\beta_{i+1}} \cdots p_n^{\beta_n}.$$

此式显然不成立（因左端是 p_i 的倍数，而右端不是）.故$\alpha_i = \beta_i$对一切 i=1，2，⋯，n 均成立.惟一性得证.

推论：(合数的因子个数计算公式）若 $A = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_n^{\alpha_n}$ 为标准分解式，则 A 的所有因子（包括 1 和 A 本身）的个数等于$(\alpha_1+1)(\alpha_2+1)\cdots(\alpha_n+1)$.（简记为$\prod_{i=1}^{n}(\alpha_i+1)$）

这是因为，乘积$(1+p_1+p_1^2+\cdots+p_1^{\alpha_1})\cdot(1+p_2+p_2^2+\cdots+p_2^{\alpha_2})\cdots(1+p_n+p_n^2+\cdots+p_n^{\alpha_n})$的每一项都是 A 的一个因子，故共有$\prod_{i=1}^{n}(\alpha_i+1)$个.

定理：质数的个数是无穷的.

【证明】假定质数的个数只有有限多个 $p_1, p_2, \cdots p_n$, 考察整数 $a = p_1 p_2 \cdots p_n + 1$. 由于 $a > 1$ 且又不能被 $p_i (i = 1,2,\cdots,n)$ 除尽，于是由算术基本定理知，a 必能写成一些质数的乘积，而这些质数必异于 $p_i (i = 1,2,\cdots,n)$，这与假定矛盾.故质数有无穷多个.

赛题精讲

例 1．设正整数 d 不等于 2，5，13.证明在集合｛2，5，13，d｝中可以找到两个元素 a,b，使得 ab－1 不是完全平方数.（第 27 届 IMO 试题）

【解】由于 2×5－1=3^2，2×13－1=5^2，5×13－1=8^2，因此，只需证明 2d－1，5d－1，13d－1 中至少有一个不是完全平方数.

用反证法，假设它们都是完全平方数，令

$2d-1=x^2$ ①

$5d-1=y^2$ ②

$13d-1=z^2$ ③

$x,y,z\in \mathrm{N}^*$

由①知，x 是奇数，设 x=2k－1，于是 2d－1=（2k－1）^{2}，即 d=2k^2－2k+1，这说明 d 也是奇数.因此，再由②，③知，y,z 均是偶数.

设 y=2m,z=2n,代入③、④，相减，除以 4 得，2d=n^2－m^2=(n+m)(n－m)，从而 n^2－m^{2}为偶数，n，m 必同是偶数，于是 m+n 与 m－n 都是偶数，这样 2d 就是 4 的倍数，即

d 为偶数，这与上述 d 为奇数矛盾.故命题得证.

例 2. 设 a、b、c、d 为奇数，$0 < a < b < c < d$,并且$ad = bc$，证明：如果 $a+d=2^k$, $b+c=2^m$，k,m 为整数，那么 a=1. （第 25 届 IMO 试题）

【证明】首先易证：$2^k > 2^m$.从而$k > m$(因为$d-a > b-c$,于是$(a+d)^2 = (a-d)^2 + 4ad$ $> (b-c)^2 + 4bc = (b+c)^2$.再由$ad = bc, d = 2^k - a, c = 2^m - b$可得$b \cdot 2^m - a \cdot 2^k = b^2 - a^2$,

因而$2^m(b - a \cdot 2^{k-m}) = (b+a)(b-a)$ ①

显然，$b+a, b-a$为偶数，$b - 2^{k-m}a$为奇数，并且$b+a$和$b-a$只能一个为 4n 型偶数，一个为 4n+2 型偶数（否则它们的差应为 4 的倍数，然而它们的差等于 $2a$ 不是 4 的倍数），

因此,如果设$b - 2^{k-m}a = e \cdot f$，其中 e,f 为奇数，那么由①式及$b+a, b-a$的特性就有

（Ⅰ）$\begin{cases} b+a = 2^{m-1}e, \\ b-a = 2f. \end{cases}$或（Ⅱ）$\begin{cases} b+a = 2f, \\ b-a = 2^{m-1}e. \end{cases}$

由$ef = b - 2^{k-m}a \le b - 2a < b - a \le 2f$ 得 e=1，

从而$f = b - 2^{k-m}a$.于是（Ⅰ）或（Ⅱ）分别变为

$\begin{cases} b+a = 2^{m-1}, \\ b-a = 2(b - 2^{k-m}a) \end{cases}$ 或 $\begin{cases} b+a = 2(b - 2^{k-m}a), \\ b-a = 2^{m-1} \end{cases}$

解之，得$a \cdot 2^{k-m+1} = 2^{m-1}$.因 a 为奇数，故只能 a=1.

例 3. 设 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 是一组数，它们中的每一个都取 1 或－1，而且 $a_1a_2a_3a_4+a_2a_3a_4a_5+\cdots+a_na_1a_2a_3=0$，证明：n 必须是 4 的倍数. （第 26 届 IMO 预选题）

【证明】由于每个a_i均为 1 和－1，从而题中所给的等式中每一项$a_ia_{i+1}a_{i+2}a_{i+3}$也只取 1 或－1，而这样的 n 项之和等于 0，则取 1 或－1 的个数必相等，因而 n 必须是偶数，设 n=2m.

再进一步考察已知等式左端 n 项之乘积=$(a_1a_2\cdots a_n)^4$=1，这说明，这 n 项中取－1 的项（共 m 项）也一定是偶数，即 m=2k，从而 n 是 4 的倍数.