奇数、偶数、质数、合数（二）

例 4．如 n 是不小于 3 的自然数，以 $f(n)$ 表示不是 n 的因数的最小自然数[例如 $f(n)$ =5]. 如果 $f(n)$ ≥3，又可作 $f(f(n))$.类似地，如果 $f(f(n))$ ≥3，又可作 $f(f(f(n)))$ 等等.如果 $f(f(f\cdots f(n)\cdots))=2$，共有 k 个 f，就把 k 叫做 n 的“长度”.如果用 l_n 表示 n 的长度，试对任意的自然数 n（n≥3），求 l_n，并证明你的结论.

（第 3 届全国中学生数学冬令营试题）

【解】令 $n=2^m t, m$ 为非负整数，t 为奇数. 当 m=0 时，$f(n)=f(t)=2$，因而 l_n=1；当 $m\neq 0$ 时，设 u 是不能整除奇数 t 的最小奇数，记 $u=g(t)$.

（1）若 $g(t)<2^{m+1}$, 则 $f(n)=u, f(f(n))=2$, 所以 $l_n=2$.

（2）若 $g(t)>2^{m+1}$, 则 $f(n)=2^{m+1}, f(f(n))=f(2^{m+1})=3, f(f(f(n)))=f(3)=2$, 所以 $l_n=3$.

$$\text{故}\ l_n=\begin{cases}1, \text{当} n \text{为奇数时};\\ 3, \text{当} n=2^m t, m>0, t \text{为奇数, 且} g(t)>2^{m+1}(g(t)\text{如上});\\ 2, \text{其他情形}.\end{cases}$$

例 5．设 n 是正整数，k 是不小于 2 的整数.试证：n^k 可表示成 n 个相继奇数的和.

【证明】对 k 用数学归纳法.

当 k=2 时，因 $n^2=1+3+\cdots+(2n-1)$, 命题在立.

假设 k=m 时成立，即 $n^m=(a+1)+(a+3)+\cdots+(a+2n-1)=na+n^2$,（$a$ 为某非负数） 则 $n^{m+1}=n^m\cdot n=(na+n^2)n=n(na+n^2-n)+n^2$,

若记 $b=na+n^2-n$（显然 b 为非负偶数），于是

$n^{m+1}=nb+n^2=(b+1)+(b+3)+\cdots+(b+2n-1)$, 即 $k=m+1$ 时，命题成立，故命题得证.

例 6．在平面上任画一条所有顶点都是格点的闭折线，并且各节的长相等.能使这闭折线的节数为奇数？证明你的结论. （莫斯科数学竞赛试题）

【解】令符合题设条件的闭折线为 $A_1A_2\cdots A_nA_1$，则所有顶点 A_i 的坐标（x_i, y_i）符合 $x_i, y_i \in Z(i=1,2,\cdots,n)$.并且 $X_i^2+Y_i^2=C(i=1,2,\cdots n, C$ 为一固定的正整数)，其中 $X_i=x_i-x_{i+1}, Y_i=y_i-y_{i+1}(i=1,2,\cdots,n, x_{n+1}=x_1, y_{n+1}=y_1)$,则由已知有

$$\sum_{i=1}^{n} X_i = 0, \quad ①$$

$$\sum_{i=1}^{n} Y_i = 0, \quad ②$$

$$X_1^2+Y_1^2=X_2^2+Y_2^2=\cdots=X_n^2+Y_n^2 \quad ③$$

不妨设 X_i和Y_i 中至少有一个为奇数（因为设 $X_i=2^m t_i, m$ 是指数最小的，t_i 为奇数，用 2^m 除所有的数后，其商仍满足①、②、③式），于是它们的平方和 C 只能为 4k+1 或 4k+2.

当 C=4k+2 时，由③知，所有数对 X_i与Y_i 都必须是奇数，因此，根据①、②式知，n 必为偶数.

当 C=4k+1 时，由③知，所有数对 X_i与Y_i 都必一奇一偶，而由①知，X_i 中为奇数的有偶数个（设为 $2u$），余下的 n－2u 个为偶数（与之对应的 Y_i 必为奇数），再由②知，这种奇数的 Y_i 也应有偶数个（设为 $2v=n-2u$），故 $n=2(u+v)$=偶数.

综上所述，不能作出满足题设条件而有奇数个节的闭折线.

例 7．求出最小正整数 n，使其恰有 144 个不同的正因数，且其中有 10 个连续整数.

（第 26 届 IMO 预选题）

【解】根据题目要求，n 是 10 个连续整数积的倍数，因而必然能被 2，3，…，10 整数.由于 $8=2^3$，$9=3^2$，$10=2\times5$，故其标准分解式中，至少含有 $2^3\cdot3^2\cdot5\cdot7$ 的因式，因此，若设 $n=2^{\alpha_1}\cdot3^{\alpha_2}\cdot5^{\alpha_3}\cdot7^{\alpha_4}\cdot11^{\alpha_5}\cdots$，则 $\alpha_1\ge3, \alpha_2\ge2, \alpha_3\ge1, \alpha_4\ge1$. 由

$(\alpha_1+1)(\alpha_2+1)(\alpha_3+1)(\alpha_4+1)\cdots=144$, 而 $(\alpha_1+1)(\alpha_2+1)(\alpha_3+1)(\alpha_4+1)\ge4\cdot3\cdot2\cdot2=48$,

故最多还有一个 $\alpha_j>0(j\ge5)$, 且 $\alpha_j\le2$, 为使 n 最小，自然宜取 $2\ge\alpha_5\ge0$. 由

$(\alpha_1+1)(\alpha_2+1)(\alpha_3+1)(\alpha_4+1)(\alpha_5+1)=144(\alpha_5\neq 0\text{时})$或$(\alpha_1+1)(\alpha_2+1)(\alpha_3+1)(\alpha_4+1)=144(\alpha_5=0\text{时})$，

考虑 144 的可能分解，并比较相应 n 的大小，可知合乎要求的（最小）$\alpha_1=5,\alpha_2=2,$

$\alpha_3=\alpha_4=\alpha_5=1,$ 故所求的$n=2^5\cdot 3^2\cdot 5\cdot 7\cdot 11=110880.$

下面讲一个在指定集合内的“合数”的问题.这种合数与通常的合数有区别，题中的“素元素”是指在该集合内的素数，也与通常的素数有区别.

例 8．设 n>2 为给定的正整数，$V_n=\{kn+1,k\in N^*\}$.试证：存在一数$r\in V_n$,这个数可用不只一种方式表示成数集 V_n 中素元素的乘积.　　　　（第 19 届 IMO 试题）

【证明】由于 V_n 中的数都不小于$n+1(n>2)$,因而$(n-1)^2,(2n-1)^2,(n-1)\cdot(2n-1)\in V_n$.显然$(n-1)^2,(n-1)\cdot(2n-1)$是 V_n 中的素元素.又若（2n－1）^{2} 不是 V_n 中素元素，则有

$a\geq b\geq 1,$使$(an+1)\cdot(bn+1)=(2n-1)^2$, 由此有 $4n-4=abn+a+b,$ 于是$1\leq ab\leq 3,$

从而 b=1,*a*=1;b=1,*a*=2,b=1,*a*=3,对此就有$n=2,\frac{8}{2},8,$故 n=8.这说明 ，当$n\neq 8$时,$(2n-1)^2$就是 V_n 中素元素.

当$n\neq 8$时,令$r=(n-1)^2(2n-1)^2$.显然$r\in V_n$,且$r=(n-1)^2(2n-1)^2=[(n-1)(2n-1)]$

$[(n-1)(2n-1)].$

当 n=8 时，有 1089=136×8+1=9×121=33×33，而 9，121，33∈V_8.

综上知，命题得证.

例 9．已知 n≥2，求证：如果k^2+k+n对于整数 k（$0\leq k\leq\sqrt{\frac{n}{3}}$）是质数，则$k^2+k+n$

对于所有整数$k(0\leq k\leq n-2)$都是质数.

（第 28 届（1987）国际数学奥林匹克试题 6）

【证】设 m 是使k^2+k+n为合数的最小正整数.若$\sqrt{\frac{n}{3}}<m\leq n-2$,令$p$是$m^2+m+n$的最小质因子，则$p\leq\sqrt{m^2+m+n}$.

（1）若 m≥p，则 p|(m－p)^2+(m－p)+n.　又(m－p)^2+(m－p)+n≥n＞p，这与 m 是使k^2+k+n为合数的最小正整数矛盾.

（2）若 m≤p－1，则$(p-1-m)^2+(p-1-m)+n=(p-1-m)(p-m)+n$被 p

整除，且$(p-1-m)^2+(p-1-m)+n\geq n> p.$

因为$(p-1-m)^2+(p-1-m)+n$为合数，所以$p-1-m\geq m, p\geq 2m+1.$

由　$2m+1\leq p\leq\sqrt{m^2+m+n},$　即　$3m^2+3m+1-n\leq 0,$

由此得$m\leq\dfrac{-3+\sqrt{12n-3}}{6}<\sqrt{\dfrac{n}{3}}$

与已知矛盾.所以，对所有的$\sqrt{\dfrac{n}{3}}<k\leq n-2, k^2+k+n$为质数.