整 除（续）

Ⅲ.方幂问题

一个正整数n能否表成m个整数的k次方和的问题称为方幂和问题.特别地，当$m=1$时称为k次方问题，当$k=2$时，称为平方和问题.

能表为某整数的平方的数称为完全平方数.简称平方数，关于平方数，明显有如下一些简单的性质和结论：

（1）平方数的个位数字只可能是 0，1，4，5，6，9.

（2）偶数的平方数是 4 的倍数，奇数的平方数被 8 除余 1，即任何平方数被 4 除的余数只能是 0 或 1.

（3）奇数平方的十位数字是偶数.

（4）十位数字是奇数的平方数的个位数一定是 6.

（5）不能被 3 整除的数的平方被 3 除余 1，能被 3 整除的数的平方能被 3 整除.因而，平方数被 9 除的余数为 0，1，4，7，且此平方数的各位数字的和被 9 除的余数也只能为 0，1，4，7.

（6）平方数的约数的个数为奇数.

（7）任何四个连续整数的乘积加 1，必定是一个平方数.

进一步研究可得到有关平方和的几个结论:

定理三：奇素数p能表示成两个正整数的平方和的充要条件是$p=4m+1$.

定理四：设正整数$n=m^2p$，其中p不再含平方因数，n能表示成两个整数的平方的充要条件是p没有形如$4q+3$的质因数.

定理五：每个正整数都能表示成四个整数的平方和.

这几个定理的证明略.这里重点是介绍有关k方幂的解法技巧.k方幂中许多问题实质上是不定方程的整数解问题，比如著名的勾股数问题.

赛题精讲

例 1：证明：对于任何自然数n和k，数$f(n,k)=2n^{3k}+4n^{k}+10$都不能分解成若干个连续的正整数之积.

（1981 年全国高中联赛试题）

【证明】由性质 9 知，只需证明数$f(n,k)$不能被一个很小的自然数n整除.因

$$f(n,k)=3n^{3k}+3n^{k}-n^{3k}+n^{k}+10=3(n^{3k}+n^{k}+3)-n^{k}(n^{k}-1)(n^{k}+1)+1,$$

$3\mid 3(n^{3k}+n^{k}+3), 3\mid n^{k}(n^{k}-1)(n^{k}+1), 3\nmid 1$，故$3\nmid f(n,k)$，因而$f(n,k)$不能分解成三个或三个以上的连续自然数的积.

再证 $f(n,k)$ 不能分解成两个连续正整数的积.

由上知， $f(n,k)=3q+1(q\in N)$ ，因而只需证方程：$3q+1=x(x+1)$ 无正整数解.而这一点可分别具体验算 $x=3r,34+1,34+2$ 时， $x(x+1)$ 均不是 $3q+1$ 形的数来说明.

故 $f(n,k)$ 对任何正整数 n 、 k 都不能分解成若干个连续正整数之积.

例 2： 设 p 和 q 均为自然数,使得

$$\frac{p}{q}=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\cdots-\frac{1}{1318}+\frac{1}{1319}.$$

证明： p 可被 1979 整除. (第 21 届 IMO 试题)

【证明】 $\frac{p}{q}=(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\cdots+\frac{1}{1319})-2(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{1318})$

$$=(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{1319})-(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{659})$$

$$=(\frac{1}{660}+\frac{1}{1319})+(\frac{1}{661}+\frac{1}{1318})+\cdots+(\frac{1}{989}+\frac{1}{990})$$

$$=1979\times(\frac{1}{660\times1319}+\frac{1}{661\times1318}+\cdots+\frac{1}{989\times990})$$

两端同乘以 1319！得 1319！$\times\frac{p}{q}=1979\times m(m\in N^*)$. 此式说明 1979|1319！× p.由于 1979 为质数,且 1979 $\nmid$ 1319 !，故 1979| p.

【评述】把 1979 换成形如 $3k+2$ 的质数，1319 换成 $2k+1(k\in N^*)$ ，命题仍成立.

牛顿二项式定理和 $(a-b)\mid a^n-b^n,(a+b)\mid a^n-b^n$ (n 为偶数), $(a+b)\mid a^n-b^n$ (n 为奇数)在整除问题中经常用到.

例 3 ：对于整数 n 与 k ，定义 $F(n,k)=\sum_{r=1}^{n}r^{2k-1}$,求证： $F(n,1)$ 可整除 $F(n,k)$.

（1996 加拿大数学竞赛试题）

【证明】当 $n=2m$ 时， $F(2m,1)=\sum_{r=1}^{2m}r=m(2m+1)$,

$$F(2m,k)=\sum_{r=1}^{m}r^{2k-1}+\sum_{r=m+1}^{2m}r^{2k-1}$$

$$=\sum_{r=1}^{m} r^{2k-1}+\sum_{r=1}^{m}(2m+1-r)^{2k-1}$$

$$=\sum_{r=1}^{m}[r^{2k-1}+(2m+1-r)^{2k-1}],$$

由于[$\cdots$]能被$r+(2m+1-r)=2m+1$整除，所以$F(2m,k)$能被$2m+1$整除，另一方面，

$$F(2m,k)=\sum_{r=1}^{m-1}[r^{2k-1}+(2m-r)^{2k-1}]+m^{2k-1}+(2m)^{2k-1},$$

上式中[$\cdots$]能被$r+(2m-r)=2m$整除，所以$F(2m,k)$也能被m整除.因m与 $2m+1$互质，所以$F(2m,k)$能被m（$2m+1$）（即$F(m,1)$）整除.

类似可证当$n=2m+1$时，F（$2m+1$，k）能被F（$2m+1,1$）整除.故 $F(n,k)$ 能 被 $F(n,1)$整除.

例 4 ：求一对整数a,b，满足：(1) $ab(a+b)$不能被 7 整除；(2) $(a+b)^7-a^7-b^7$能被 7^7 整除. (第 25 届 IMO 试题)

【解】$(a+b)^7-a^7-b^7=7ab[(a^5+b^5)+3ab(a^3+b^3)+5a^2b^2(a+b)]$

$$=7ab(a+b)(a^2+b^2+ab)^2.$$

根据题设要求(1)(2)知，$7^6\mid(a^2+b^2+ab)^2\mid$,即$7^3\mid a^2+b^2+ab.$

令$a^2+b^2+ab=7^3$,即$(a+b)^2-ab=343$,即$a+b=19$，则$ab=19^2-343.$故可令$a=18,b=1$即合要求.

(第 15 届美国普特南数学竞赛试题)

【评述】数学归纳法在整除问题中也有广泛应用.

例 5：是否存在 1000000 个连续整数，使得每一个都含有重复的素因子，即都能被某个素数的平方所整除？

【解】存在.用数学归纳法证明它的加强命题：对任何正整数m,存在m个连续的整数，使得每一个都含有重复的素因子.

当$m=1$时，显然成立.这只需取一个素数的平方.

假设当$m=k$时命题成立,即有k个连续整数$n+1,n+2,\cdots,n+k$,它们分别含有重复的

素因子 $p_1, p_2, \cdots, p_k$，任取一个与 $p_1, p_2, \cdots, p_k$ 都不同的素数 p_{k+1}（显然存在），当 $t=1,2,\cdots p_{k+1}^2$ 时，$tp_1^2 p_2^2 \cdots p_k^2 + n + (k+1)$ 这 p_{k+1}^2 个数中任两个数的差是形如 $ap_1^2 p_2^2 \cdots p_k^2 (1 \le a \le p_{k+1}^2 - 1)$ 的数,不能被 p_{k+1}^2 整除,故这 p_{k+1}^2 个数除以 p_{k+1}^2 后,余数两两不同.但除以 p_{k+1}^2 后的余数只有 0，1，⋯，$p_{k+1}^2 - 1$ 这 p_{k+1}^2 个，从而恰有一个数 $t_0 (1 \le t_0 \le p_{k+1}^2)$，使 $t_0 p_1^2 p_2^2 \cdots p_k^2 + n + (k+1)$ 能被 p_{k+1}^2 整除.这时，（$k+1$）个连续整数：

$t_0 p_1^2 p_2^2 \cdots p_k^2 + n + 1$，$t_0 p_1^2 p_2^2 \cdots p_k^2 + n + 2$，⋯，$t_0 p_1^2 p_2^2 \cdots p_k^2 + n + k$，$t_0 p_1^2 p_2^2 \cdots p_k^2 + n +$（$k+1$）

分别能被 $p_1^2, p_2^2 \cdots p_k^2, p_{k+1}^2$ 整除，即 $m = k+1$ 时命题成立.故题对一切正整数 m 均成立.

例 6：求证：$\dfrac{[a,b,c]^2}{[a,b][b,c][c,a]} = \dfrac{(a,b,c)^2}{(a,b)(b,c)(c,a)}$.

（第 1 届美国数学奥林匹克竞赛试题）

【证明】设 $a=\prod_{i=1}^{n} p_i^{\alpha} i, b=\prod_{i=1}^{n} p_i^{\beta} i, c=\prod_{i=1}^{n} p_i^{\gamma} i,$ 其中 p_i 为质数，$\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ 为非负整数，则

$$[a,b,c]=\prod_{i=1}^{n} p_i^{\max(\alpha_i,\beta_i,\gamma_i)},$$

$$[a,b]=\prod_{i=1}^{n} p_i^{\max(\alpha_i,\beta_i)} \cdots,$$

$$(a,b,c)=\prod\prod_{i=1}^{n} p_i^{\min(\alpha_i,\beta_i,\gamma_i)},$$

$$(a,b)=\prod_{i=1}^{n} p_i^{\min(\alpha_i,\beta_i)} \cdots,$$

因此只需证明

$$2\max(\alpha_i,\beta_i,\gamma_i)-\max(\alpha_i,\beta_i)-\max(\beta_i,\gamma_i)-\max(\gamma_i,\alpha_i)$$

$$=2\min(\alpha_i,\beta_i,\gamma_i)-\min(\alpha_i,\beta_i)-\min(\beta_i,\gamma_i)-\min(\gamma_i,\alpha_i)$$

上式关于 $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ 对称，则不妨设 $\alpha_i \ge \beta_i \ge \gamma_i$，于是上式变为：

$2\alpha_i-\alpha_i-\beta_i-\alpha_i=2\gamma_i-\beta_i-\gamma_i-\gamma_i$.此式显然成立，故得证.

例 7：设 a 和 b 是两个正整数，$(a,b)=1, p$ 为大于或等于 3 的质数，$c=(a+b,\dfrac{a^p+b^p}{a+b})$，试证：(1) $(c,a)=1$；(2) $c=1$ 或 $c=p$.（1985 新加坡数学竞赛试题）

【证明】由已知得 $a+b=ct,\dfrac{a^p+b^p}{a+b}=cs(t,s\in N)$，两式相乘得 $c^2st=a^p+b^p=a^p+(ct-a)^p=c^pt^p-pac^{p-1}t^{p-1}+\cdots+pa^{p-1}ct$, 于是

$cs=c^{p-1}t^{p-1}-pac^{p-2}t^{p-2}+\cdots+pa^{p-1}$, 故 $c\mid pa^{p-1}$.

（1）现用反证法来证明 $(c,a)=1$.若 $(c,a)=k>1$, 令 q 是 k 的一个质因子，则有 $q\mid c,q\mid a$.因 $c\mid a+b$，则 $q\mid a+b$，从而 $q\mid b$.于是 q 是 a、b 的一个公约数，这与 $(a,b)=1$ 矛盾，故 $(c,a)=1$.

（2）因为 $c\mid pa^{p-1},(c,a)=1$, 所以 $c\mid p$.而 p 为质数且 $p\geq 3$，故 $c=1$ 或 $c=p$.

例 8：设 $S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}(k^5+k^7)$，求最大公约数 $d=(S_n,S_{3n})$.（第 26 届 IMO 预选题）

【解】能过具体计算可猜想

$S_n=2(1+2+\cdots+n)^4=2(\dfrac{n(n+1)}{2})^4$.　此式不难用数学归纳法获证.

为求 $d=(S_n,S_{3n})$，对 n 分奇偶来讨论.

（1）当 $n=2k$ 时，

$$d=(2[\frac{2k(2k+1)}{2}]^4,2[\frac{6k(6k+1)}{2}]^4)=(2k^4(2k+1)^4,2\times 81k^4(6k+1)^4).$$

由于 $2k+1$ 和 $6k+1$ 互质，所以 $d=2k^4((2k+1)^4,81)$.而当 $k=3t+1$ 时

$(2k+1)^4=81(2t+1)^4, k\neq 3t+1$ 时，$(2k+1)^4$ 与 81 互质.故此时有

$$d=\begin{cases}2\times 81k^4=2\times 81\times\dfrac{n^4}{2^4}=\dfrac{81}{8}n^4,\text{当}n=6t+2\text{ 时};\\ 2k^4=\dfrac{1}{8}n^4,\text{当}n=6t+6\text{或}6t+4\text{时}(t\ge 0).\end{cases}$$

（2）当当 $n=2k+1$ 时 $d=(2[(2k+1)(k+1)]^4,2[3(2k+1)(3k+2)^4)$.

因$3k+2$与$2k+1,k+1$与质，所以 $k=2(2k+1)^4((k+1)^4,3^4)$. 而当 $k=3t+2$ 时，$k+1=3(t+1),k\ne 3k+2$ 时，$k+1$ 与 3^4 互质.故此时有

$$d=\begin{cases}2(2k+1)\times 3^4=2n^4\times 3^4=162n^4,\text{当}n=6t+5\text{时};\\ 2(2k+1)^4=2n^4\text{当}n=6t+1\text{或}6t+3\text{时}).\end{cases}$$

例 9：m 盒子中各若干个球，每一次在其中 $n(n<m)$ 个盒中加一球.求证：不论开始的分布情况如何，总可按上述方法进行有限次加球后使各盒中球数相等的充要条件是 $(m,n)=1$.　　（第 26 届 IMO 预选题）

【证明】设 $(m,n)=1$，则有 $u,v\in Z$ 使得 $un=vm+1=v(m-1)+(v+1)$，此式说明：对盒子连续加球 u 次，可使 $m-1$ 个盒子各增加了 v 个，一个增加 $(v+1)$ 个.这样可将多增加了一个球的盒子选择为原来球数最少的那个，于是经过 u 次加球之后，原来球数最多的盒子中的球与球数最少的盒子中的球数之差减少 1，因此，经过有限次加球后，各盒球数差为 0，达到各盒中的球数相等.

用反证法证明必要性.若 $(m,n)=d>1$，则只要在 m 个盒中放 $m+1$ 个球，则不管加球多少次，例如，加球 k 次，则这时 m 个盒中共有球 $m+1+kn$（个），因为 $d\mid m,d\mid n,d>1$, 所以 $m+1+kn$ 不可能是 d 的倍数，更不是 m 的倍数，各盒中的球决不能一样多，因此，必须 $(m,n)=1$.

例 10：求所有这样的自然数 n，使得 $2^8+2^{11}+2^n$ 是一个自然数的平方.

（1980 年第 6 届全俄数学竞赛试题）

【证明】（1）当 $n\le 8$ 时，$N=2^8+2^{11}+2^n\cdot(2^{8-n}+2^{11-n}+1)$，因（$\cdots$）为奇数，所以要使 N 为平方数，$n$ 必为偶数.逐一验证 $n=2,4,6,8$ 知，N 都不是平方数.

（2）当$n=9$时，$N=2^{8}+2^{11}+2^{9}=2^{8}\times 11$不是平方数.

（3）当$n\geq 10$时，$N=2^{8}(9+2^{n-8})$，要 N 为平方数，$9+2^{n-8}$应为奇数的平方，不妨假设$9+2^{n-8}=(2k+1)^{2}$,则$2^{n-10}=(k-1)\times(k+2)$. 由于$k-1$和$k+2$是一奇一偶，左边为 2 的幂，因而只能$k-1$=1，于是得$k=2$，由$2^{n-10}=2^{2}$知$n=12$为所求.