2002 年 IMO 中国国家集训队选拔考试

一、设凸四边形 ABCD 的两组对边所在的直线分别交于 E、F 两点，两对角线的交点为 P，过 P 作 PO⊥EF 于 O.求证：∠BOC=∠AOD.

二、设 $a_1=\frac{1}{4}$，$a_n=\frac{1}{4}(1+a_{n-1})^2$，$n\geq 2$.求最小实数 λ，使得对任意非负实数 $x_1,x_2,\cdots,x_{2002}$，有 $\sum_{k=1}^{2002}A_k\leq \lambda a_{2002}$,其中 $A_k=\dfrac{x_k-k}{(x_1+\cdots+x_{2002}+\frac{k(k-1)}{2}+1)^2}$， $k\geq 1$.

三、17 名球迷计划去韩国观看世界杯足球赛，他们共选定 17 场球赛.预定门票的情况满足下列条件：

（i）每人每场至多预订一张门票;

（ii）每两人所预订的门票中，至多有一场相同;

（iii）预订了 6 张门票的只有一人.

问这些球迷最多能预订多少张门票？说明理由.

四、求所有的自然数 n $(n\geq 2)$，使得存在实数 a_1， a_2，…， a_n，满足

$$\{|a_i-a_j||1\leq i\leq j\leq n\}=\{1,2,\cdots,\frac{n(n-1)}{2}\}.$$

（b）设 A={1，2，3，4，5，6}，B={7，8，9，…， n }，在 A 中取三个数 B 中取两个数组成五个元素的集合 A_i， i=1，2，…，20， $|A_i\cap A_j|\leq 2$，$1\leq i\leq j\leq 0$.求 n 的最小值.

五、设 k 为给定的整数， $f(n)$ 是定义在负整数集上且取值为整数的函数，满足

$$f(n)f(n+1)=\left(f(n)+n-k\right)^2,\quad n=-2,-3,-4,\cdots.$$

求函数 $f(n)$ 的表达式.

六、设 $f(x_1,x_2,x_3)=-2(x_1^3+x_2^3+x_3^3)+2[x_1^2(x_2+x_3)+x_2^2(x_3+x_1)+x_3^2(x_1+x_2)]-12x_1x_2x_3$.

对于任意实数 r 、 s 、 t，记

$$g(r,s,t)=\max_{t\leq x_3\leq t+2}\left|f(r,r+2,x_3)+s\right|$$

求函数 $g(r,s,t)$ 的最小值.