

## 2003 年 IMO 中国国家集训队选拔考试

一、在锐角 $\triangle ABC$ 中， $AD$ 是 $\angle A$ 的内角平分线，点 $D$ 在边 $BC$ 上，过点 $D$ 分别作 $DE \perp AC$ 、 $DF \perp AB$ ，垂足分别为 $E$ 、 $F$ ，连结 $BE$ 、 $CF$ ，它们相交于点 $H$ ， $\triangle AFH$ 的外接圆交 $BE$ 于点 $G$ 。求证：以线段 $BG$ 、 $GE$ 、 $BF$ 组成的三角形是直角三角形。（熊斌 命题）

二、设 $A \subseteq \{0, 1, 2, \dots, 29\}$ ，满足：对任何整数 $k$ 及 $A$ 中任意数 $a, b$ （ $a, b$ 可以相同）， $a + b + 30k$ 均不是两个相邻整数之积。试定出所有元素个数最多的 $A$ 。（陈永高 命题）

三、设 $A \subset \{(a_1, a_2, \dots, a_n) \mid a_i \in R, i = 1, 2, \dots, n\}$ ， $A$ 是有限集，对任意的 $\alpha = (a_1, a_2, \dots, a_n) \in A$ ，

$\beta = (b_1, b_2, \dots, b_n) \in B$  定义：

$$\gamma(\alpha, \beta) = (|a_1 - b_1|, |a_2 - b_2|, \dots, |a_n - b_n|),$$

$$D(A) = \{\gamma(\alpha, \beta) \mid \alpha \in A, \beta \in B\}.$$

试证： $|D(A)| \geq |A|$ 。（冷岗松 命题）

四、求所有正整数集上到实数集的函数 $f$ ，使得

(1) 对任意 $n \geq 1$ ， $f(n+1) \geq f(n)$ ；

(2) 对任意 $m, n$ ， $(m, n) = 1$ ，有

$$f(mn) = f(m)f(n).$$
（潘承彪 命题）

五、设 $A = \{1, 2, \dots, 2002\}$ ， $M = \{1001, 2003, 3005\}$ ，对 $A$ 的任意非空子集 $B$ ，当 $B$ 中任意两

数之和不属于 $M$ 时，称 $B$ 为 $M$ -自由集，如果 $A = A_1 \cup A_2$ ， $A_1 \cap A_2 = \emptyset$ ，且 $A_1, A_2$ 均为 $M$ -自由集，那么称有序对 $(A_1, A_2)$ 为 $A$ 的一个 $M$ -划分，试求 $A$ 的所有 $M$ -划分的个数。（李胜宏 命题）

六、设实数列 $\{x_n\}$ 满足： $x_0 = 0$ ， $x_2 = \sqrt[3]{2}x_1$ ， $x_3$ 是正整数，且

$$x_{n+1} = \frac{1}{\sqrt[3]{4}}x_n + \sqrt[3]{4}x_{n-1} + \frac{1}{2}x_{n-2}, \quad n \geq 2$$

问：这类数列中最少有多少个整数项？（黄玉民 命题）