2002 年中国西部数学奥林匹克

1、求所有的正整数 n，使得 $n^4-4n^3+22n^2-36n+18$ 是一个完全平方数．

2、设 O 为锐角△ABC 的外心，P 为△AOB 内部的一点，P 在△ABC 的三边 BC、CA、AB 上的射影分别为 D、E、F．求证：以 FE、FD 为邻边的平行四边形位于△ABC 内．

3、考虑复平面上的正方形，它的四个顶点所对应的复数恰好是某个整系数一元四次方程 $x^4+px^3+qx^2+rx+s=0$ 的 4 个根．求这个四边形面积的最小值．

4、设 n 为正整数，集合 $A_1,A_2,\cdots,A_{n+1}$ 是集合$\{1,2,\cdots,n\}$的 $n+1$ 的非空子集．证明存在$\{1,2,\cdots,n+1\}$的两个不交的非空子集$\{i_1,i_2,\cdots,i_k\}$和$\{j_1,j_2,\cdots,j_m\}$，使得

$$A_{i_1}\cup A_{i_2}\cup\cdots\cup A_{i_k}=A_{j_1}\cup A_{j_2}\cup\cdots\cup A_{j_m}.$$

5、在给定的梯形 $ABCD$ 中，$AD\,/\!/\,BC$，E 是边 AB 上的动点，O_1、O_2 分别是△AED、△BEC 的外心．求证：O_1O_2 的长为一定值．

6、设 $n(n\geqslant 2)$是给定的正整数，求所有的整数组$(a_1,a_2,\cdots,a_n)$满足条件：

（1）$a_1+a_2+\cdots+a_n\geqslant n^2$；

（2）$a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2\leqslant n^3-1$．

7、设 a、b 为方程 $x^2-x-1=0$ 的两个根，令 $a_n=\dfrac{\alpha^n-\beta^n}{\alpha-\beta}$，$n=1,2,\cdots$．

（1）证明：对任意正整数 n，有 $a_{n+2}=a_{n+1}+a_n$．

（2）求所有正整数 a、b，$a<b$，满足对任意正整数 n，有 b 整除 a_n-2na^n．

8、设 $S=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$是一个由 0,1 组成的满足下列条件的最长的数列：数列 S 中任意两个连续的 5 项不同，即对任意 $1\leqslant i<j\leqslant n-4$，$a_i,a_{i+1},a_{i+2},a_{i+3},a_{i+4}$ 与 $a_j,a_{j+1},a_{j+2},a_{j+3},a_{j+4}$ 不相同．证明：数列 S 最前面的 4 项与最后的 4 项相同．