二〇〇三年中国西部数学奥林匹克

1、将 1,2,3,4,5,6,7,8 分别放在正方体的八个顶点上，使得每一个面上的任意三个数之和均不小于 10．求每一面上四个数之和的最小值．

2、设 $2n$ 个实数 $a_1,a_2,\cdots,a_{2n}$ 满足条件 $\sum_{i=1}^{2n-1}(a_{i+1}-a_i)^2=1$，求$(a_{n+1}+a_{n+2}+\cdots+a_{2n})-(a_1+a_2+\cdots+a_{2n})$的最大值．

3、设 n 为给定的正整数，求最小的正整数 u_n，满足：对每一个正整数 d，任意 u_n 个连续的正奇数中能被 d 整除的数的个数不少于奇数 $1,3,5,\cdots,2n-1$ 中能被 d 整除的数的个数．

4、证明：若凸四边形 $ABCD$ 内任意一点 P 到四边 AB、BC、CD、DA 的距离之和为定值，则四边形 $ABCD$ 是平行四边形．

5、数列$\{a_n\}$满足 $a_0=0$，$a_{n+1}=ka_n+\sqrt{(k^2-1)a_n^2+1}$，$n=0,1,2,\cdots$其中 k 为给定的正整数．证明：数列$\{a_n\}$的每一项都是整数，且 $2k\mid a_{2n}$，$n=0,1,2,\cdots$．

6、凸四边形 $ABCD$ 有内切圆，该内切圆切边 AB、BC、CD、DA 的切点分别为 A_1、B_1、C_1、D_1，连结 A_1B_1、B_1C_1、C_1D_1、D_1A_1，点 E、F、G、H 分别为 A_1B_1、B_1C_1、C_1D_1、D_1A_1 的中点．证明：四边形 $EFGH$ 为矩形的充分必要条件是 A、B、C、D 四点共圆．

7、设非负实数 $x_1,x_2,\cdots,x_5$ 满足 $\sum_{i=1}^{5}\frac{1}{1+x_i}=1$，求证：$\sum_{i=1}^{5}\frac{x_i}{4+x_i^2}\leqslant 1$．

8、1650 个学生排成 22 行、75 列，已知其中任意两列处于同一行的两个人中，性别相同的学生都不超过 11 对．证明：男生的个数不超过 928．