2004年第四届西部数学奥林匹克

宁夏 银川

第一天 9月27日 上午8：00 — 12：00

一、求所有的整数n，使得$n^4+6n^3+11n^2+3n+31$是完全平方数．

二、$ABCD$ 为一凸四边形，I_1，I_2分别为△ABC、△DBC的内心，过点I_1，I_2的直线分别交AB、DC于点E、F，延长AB和DC，它们相交于点P，且$PE=PF$，求证A、B、C、D四点共圆．

三、求所有的实数k，使得不等式$a^3+b^3+c^3+d^3+1>k\left(a+b+c+d\right)$对任意不小于$-1$的实数$a$、$b$、$c$、$d$都成立．

四、设$n\in N^*$，用$d\left(n\right)$表示n的所有正约数的个数，$\varphi\left(n\right)$表示1，2，…，n中与n互质的数的个数．求所有的非负整数c，使得存在正整数n满足$d\left(n\right)+\varphi\left(n\right)=n+c$，且对这样的每一个$c$，求出所有满足上式的正整数$n$．

第二天 9月28日 上午8：00 — 12：00

五、设数列$\left\{a_n\right\}$满足：$a_1=a_2=1$，且$a_{n+2}=\dfrac{1}{a_{n+1}}+a_n$（$n\in N_+$）．求$a_{2004}$．

六、将$m\times n$棋盘（由m行n列方格构成，$m\geq 3$，$n\geq 3$）的所有小方格都染上红、蓝二色之一．如果两个相邻（有公共边）的小方格异色，则称这两个小方格为一个“标准对”．设棋盘中“标准对”的个数为S．试问：S是奇数还是偶数由哪些方格的颜色确定？什么情况下S为奇数？什么情况下S为偶数？说明理由．

七、已知锐角三角形ABC的三边长不全相等，周长为l，P是其内部一动点，点P在边BC、CA、AB上的射影分别为D、E、F．求证：$2(AF+BD+CE)=l$的充要条件是点P在三角形ABC的内心与外心的连线上．

八、求证：对任意$a,b,c\in R^+$，都有$1<\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}+\dfrac{b}{\sqrt{b^2+c^2}}+\dfrac{c}{\sqrt{c^2+a^2}}\leq\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$．