二〇〇二年女子数学奥林匹克

1、求出所有的正整数，使得 $20n+2$ 能整除 $2003n+2002$．

2、夏令营有 $3n$（n 是正整数）位女同学参加，每天都有 3 位女同学担任值勤工作．夏令营结束时发现这 $3n$ 位女同学中的任何两位，在同一天担任值勤工作恰好是一次．

（1）　问：当 $n=3$ 时是否存在满足题意的安排？证明你的结论；

（2）　求证：n 是奇数．

3、试求出所有的正整数 k，使得对任意满足不等式

$$k(ab+bc+ca)>5(a^2+b^2+c^2)$$

的正数 a,b,c，一定存在三边长分别为 a,b,c 的三角形．

4、圆 O_1 和圆 O_2 相交于 B,C 两点，且 BC 是圆 O_1 的直径．过点 C 作圆 O_1 的切线交圆 O_2 于另一点 A，连结 AB，交圆 O_1 于另一点 E，连结 CE 并延长，交圆 O_2 于点 F，设点 H 为线段 AF 内的任一点，连结 HE 并延长，交圆 O_1 于点，连结 BG 并延长，与 AC 的延长线交于 D 点，求证：$\dfrac{AH}{HF}=\dfrac{AC}{CD}$．

5、设 $P_1,P_2,\cdots,P_n$（$n\geqslant 2$）是 $1,2,\cdots,n$ 的任意一个排列，求证：

$$\frac{1}{P_1+P_2}+\frac{1}{P_2+P_3}+\cdots+\frac{1}{P_{n-2}+P_{n-1}}+\frac{1}{P_{n-1}+P_n}>\frac{n-1}{n+2}.$$

6、求所有的正整数对(x,y)，满足 $x^y=y^{x-y}$．

7、锐角三角形 ABC 的三条高分别为 AD,BE,CF，求证：三角形 DEF 的周长不超过三角形 ABC 的周长的一半．

8、设 $A_1, A_2,\cdots, A_8$ 是平面上任意取定的 8 个点，对平面上任意取定的一条有向直线 l，设 $A_1, A_2,\cdots, A_8$ 在该直线上的射影分别是，$P_1, P_2,\cdots, P_8$ 如果这 8 个射影两两不重合，依直线 l 的方向依次排列为 $P_{i_1},P_{i_2},\cdots,P_{i_8}$，，这样，就得到了 1,2,3,4,5,6,7,8 的一个排列 $i_1, i_2,\cdots, i_8$（在图中，这排列为 2,1,8,3,7,4,6,5）．设这 8 个点对平面上所有有向直线作射影后，得到不同的排列的个数为 $N_8=N(A_1, A_2,\cdots, A_8)$，试求 N_8 的最大值．