二〇〇三年女子数学奥林匹克

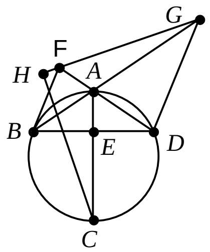
1、已知 D 是△ABC 的边 AB 上任意一点，E 是边 AC 上任意一点，连结 DE，F 是线段 DE 上的任意一点．设 $\frac{AD}{AB}=x$，$\frac{AE}{AC}=y$，$\frac{DF}{DE}=z$．证明：

（1）$S_{\triangle BDF}=(1-x)yzS_{\triangle ABC}$，$S_{\triangle CEF}=x(1-y)(1-z)S_{\triangle ABC}$；

（2）$\sqrt[3]{S_{\triangle BDF}}+\sqrt[3]{S_{\triangle CEF}}\leqslant\sqrt[3]{S_{\triangle ABC}}$．

2、某班有 47 个学生，所用的教室有 6 排，每排有 8 个坐位，用(i,j)表示位于第 i 行第 j 列的座位，设某学生原来的作为为(i,j)，如果调整后的座位为(m,n)，则称该生作了移动$[a,b]=[i-m,j-n]$，并称 $a+b$ 为该生的位置数．所有学生的位置数之和记为 S．求 S 的最大可能值和最小可能值之差．

3、如图，$ABCD$ 是圆内接四边形，AC 是圆的直径，$BD\perp AC$，AC 与 BD 的交点为 E，F 在 DA 的延长线上．连结 BF，G 在 BA 的延长线上，使得 $DG/\!/BF$，H 在 GF 的延长线上，$CH\perp GF$．证明：B、E、F、H 四点共圆．



4、（1）证明：存在和为 1 的五个非负实数 a、b、c、d、e，使得将它们任意放置在一个圆周上，总有两个相邻的数的乘积不小于 $\frac{1}{9}$；

（2）证明：对于和为 1 的五个非负实数 a、b、c、d、e，总可以将它们适当放置在一个圆周上，且任意两个相邻的数的乘积不小于 $\frac{1}{9}$．

5、数列$\{a_n\}$定义如下：$a_1=2$，$a_{n+1}=a_n^2-a_n+1$，$n=1,2,\cdots$．

证明：$1-\frac{1}{2003^{2003}}<\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_{2003}}<1$．

6、给定正整数 n（$n\geqslant 2$）．求最大的整数λ，使得不等式 $a_n^2\geqslant\lambda(a_1+a_2+\cdots+a_{n-1})+2a_n$ 对任何满足 $a_1<a_2<\cdots<a_n$ 的正整数 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 均成立．

7、设△ABC 的三边长分别为 $AB=c$、$BC=a$、$CA=b$，a、b、c 互不相等，AD、BE、CF 分别为△ABC 的三条内角平分线，且 $DE=DF$．证明：

（1）$\frac{a}{b+c}=\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}$；（2）$\angle BAC>90^\circ$．

8、对于任意正整数 n，记 n 的所有正约数组成的集合为 S_n．证明：S_n 中至多有一半元素的个位数为 3．