1995 年上海市高中数学竞赛试题

一、填空题

1、设 $f(x)$ 是二次函数，对一切 x 都有 $f(1-x)=f(x)$，且 $f(x)$ 的最大值是 $\frac{1}{2}$， $f(0)=\frac{1}{4}$，则该二次函数的解析式是 $f(x)=$_____.

2、函数 $y=f(x)$ 的反函数是 $g(x)=\log_{\sin\theta}(x+\cot^2\theta)$ $(0<\theta<\frac{\pi}{2})$，则 $f(x)=1$ 的解是_____.

3、若虚数 z 使 $2z+\frac{1}{z}$ 为实数，则 $2z+\frac{1}{z}$ 的取值范围是_____.

4、由曲线 $y=1995\sin\frac{x}{2}$ $(\pi\le x\le 5\pi)$ 与直线 $y=1995$ 围成的图形的面积是_____.

5、以两坐标轴为对称轴的二次曲线经过 $(5,\frac{9}{4})$ 和 $(\frac{17}{2},\frac{45}{8})$ 两点，其离心率 $e=$_____.

6、在棱长为 a 的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的相邻两个面上有两个正四棱锥 $V_1-A_1B_1C_1D_1$ 和 $V_2-BB_1C_1C$（V_1、V_2 都在正方体的外部），且这两个正四棱锥的侧面都是正三角形，则 $\angle V_1B_1V_2$ 的大小是_____（用反三角函数表示）.

7、正四面体 $ABCD$ 的棱长是 16，在 E 是棱 AB 的中点，F 在棱 CD 上，若 $CF=5$，则线段 EF 的长等于_____.

8、设 a、b、c 为正常数，x、y、z 为实数，且满足 $|x|\le a$，$|y|\le b$，$|z|\le c$ 则 $(x+y+z)(\sqrt{a^2-x^2}+\sqrt{b^2-y^2}+\sqrt{c^2-z^2})$ 的最大值是_____.

9、数列 $\{6^n-2\}$ 中依次取出所有能够被 11 整除的项组成数列 $\{a_n\}$，其通项公式 $a_n=$_____.

10、圆周上有 6 个点，连接其中的每两点得到许多条弦，这些弦相交得到许多个三角形（有的三角形的顶点在圆内），则最多可以得到_____个三角形.

二、求最大的整数，使得对于 $[0,1]$ 中的一切实数 a,b,c,d 都有不等式

$$4+a^2b+b^2c+c^2d+d^2a\ge k(a^3+b^3+c^3+d^3).$$

三、求所有的有序实数对（a,b,c），使得对任意三个整数 x、y、z 都有

$$|ax+by+cz|+|bx+cy+az|+|cx+ay+bz|=|x|+|y|+|z|.$$

四、对于（0,1）内的某个有理数$\dfrac{q}{p}$（p、q为互质的整数），作两个整数$\dfrac{p}{p+q}$，$\dfrac{q}{p+q}$；由这两个数，还可以按照上面的方法作出 4 个数：$\dfrac{p+q}{2p+q}$，$\dfrac{p}{2p+q}$，$\dfrac{p+q}{p+2q}$，$\dfrac{q}{p+2q}$；从这 4 个数有可以按照上面的方法作出 8 个数；…，求一切$\dfrac{p}{q}$，使得从$\dfrac{p}{q}$出发，用上述方法可以作出所有（0，1）内的有理数（包括$\dfrac{p}{q}$在内）.