1996 年上海市高中数学竞赛试题

一、填空题

1、已知α，β，$\alpha+\beta$都是锐角，用“$>$”连接$\sin(\alpha+\beta)$，$\sin\alpha+\sin\beta$，$\cos\alpha+\cos\beta$是___________________.

2、三角方程$\cos 2x=0$在区间［0，100］内的所有解的和是_____.

3、已知满足条件$|z^2|+|z^2-1|=7$的复数z在复平面内的所对应的点的集合是一条二次曲线，则该二次曲线的离心率$e=$_____.

4、已知△ABC的斜边上的高是CD，且$AD=\frac{1}{3}AB$．将△ACD绕CD旋转至△A_1CD，使得二面角A_1-CD-B为$60°$，则异面直线A_1C与AB所成的角的大小是_____（用反三角函数表示）.

5、若关于x的二次方程$ax^2-(3a+1)x+4a-5=0$至少有一个整数根，则正整数$a=$_____.

6、从集合$M=\{a\,|\,a\in N$且$a\le 100\}$中选取四个各不相等的数，使它们按照从小到大的顺序组成公比为整数的等比数列，则这样的等比数列有_____个.

7、连接椭圆$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$的右焦点$F_2$与椭圆上的动点$A$，作正方形$F_2ABC$（四顶点按顺时针方向排列），则当点$F_2$沿椭圆运动一周后，动点$C$的轨迹方程是_____.

8、四个半径为 1 的小球两两相切装在一个大球里面且都与大球相切，大球的半径是_____.

9、点集$A=\{(x,y)\,|\,\sin(3x+5y)>0$且$x^2+y^2\le\pi^2\}$所构成的平面图形的面积是_____.

10、若关于x的不等式$|x-1|>x^2+a$仅有负数解，则实数a的取值范围是__________.

二、设$k_1<k_2<k_3<\cdots$是正整数，且没有两个是相邻的，又$s_m=k_1+k_2+\cdots+k_m$（m是正整数）．求证：对于每个正整数n，区间［s_n，s_{n+1}）中至少含有一个完全平方数.

三、已知集合{1，2，3，4，5，6，7，8，9，10}，求该集合具有下列性质的子集个数：每个子集至少含有 2 个元素，且每个子集中的任意两个元素的差的绝对值大于 1.

四、平面上给定n个点A_1，A_2，…，A_n，任意三点不共线．由其中k个点对确定k条直线（即过k个点对中的每一点对作一条直线），使这k条直线不相交成三个顶点都是给定点的三角形．求k的最大值.