1997 年上海市高中数学竞赛试题

一、填空题

1、已知 $\tan\alpha=\dfrac{ab}{a^2+b^2}$（其中 a、b 为非零常数），则 $(a^2+b^2)\sin\alpha\cos\alpha-ab\cos^2\alpha=$_____.

2、已知点 $A(0,4)$，$B(4,0)$．若抛物线 $y=x^2-mx+m+1$ 与线段 AB（不包括端点 A 及 B）有两个不同的交点，则 m 的取值范围为__________.

3、已知集合 A、B 各有 12 个元素，$A\bigcap B$ 含有 4 个元素，集合 C 满足条件 $C\subset A\bigcup B$，C 含有 3 个元素且 $C\bigcap A\neq\varnothing$，这样的集合 C 共有_____个.

4、数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n=\sum\limits_{i=1}^{n}(i^2)$，$b_n=\cos(a_n\pi)$，则 $\sum\limits_{k=1}^{n}b_k$ 的值为_____.

5、集合 $A=\{z\mid |z+\frac{2}{\sqrt{3}}|\leq 1,z\in C\}$，$B=\{z\mid z\in C,|z|\leq 1\}$，则 $A\bigcap B$ 中幅角最大的复数是__________.

6、若多项式 $P(x)$ 满足方程 $P(x^2)+2x^2+10x=2x\cdot P(x+1)+3$，则其解析式 $P(x)=$_____.

7、正整数 m、n 满足 $\dfrac{m+n}{m^2+mn+n^2}=\dfrac{4}{49}$，则 $m+n$ 的值为_____.

8、有一个顶点向下且底面呈水平状的圆锥形容器，轴截面是边长为 6 的正三角形，容器里装满了水，现有一正四棱锥，底面边长为 a（$a<6$），高为 h（$h>6$），竖直地浸在容器里，为了使容器溢出的水最多，a 的值应取为_____.

9、已知实数 x、y、z、t 满足 $x+y+z+t=0$，$x^2+y^2+z^2+t^2=10$，则 $xy+yz+zt+tx$ 的最大值与最小值的和为_____.

10、数 100！的各位数字从右往左看时，第一个不是 0 的数字是_____.

二、在双曲线 $xy=1$ 上，横坐标为 $\dfrac{n}{n+1}$ 的点为 A_n，横坐标为 $\dfrac{n+1}{n}$ 的点为 B_n（$n\in N_+$）．记坐标为（1，1）的点为 M，$P_n(x_n,y_n)$ 是△A_nB_nM 的外心．当 $n\to+\infty$ 时，求 P_n 的极限坐标 (a,b)，这里 $a=\lim\limits_{n\to+\infty}x_n$，$b=\lim\limits_{n\to+\infty}y_n$.

三、设 $S=\{1,2,3,4\}$，n 项的数列 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 具有以下性质：对于 S 的任意一个非空子集 B（B 的元素个数记为 $|B|$），在该数列中有相邻的 $|B|$ 项恰好组成集合 B．求 n 的最小值.

四、求平面直角坐标系中格点凸五边形（即每个顶点的横坐标、纵坐标都是整数的凸五边形）的周长的最小值.