1998 年上海市高中数学竞赛试题

一、填空题（每小题 7 分，共 70 分）

1、$f(n)$ 是定义在正整数集 N^{+} 上的函数，且满足 $f(1)=2$，$f(n+1)=\dfrac{2f(n)+1}{2}$，则 $f(1998)=$_____.

2、函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图象是开口向下的抛物线，a、b、c 各不相等，且都在集合{绝对值不大于 5 的整数}中取值，则这些抛物线中通过点（0，1）的有_____条.

3、已知圆方程 $x^2+y^2-2\sqrt{m+1}x-\sqrt{m}y+m+1=0$（$m$ 为正参数），则圆心的轨迹是_____.

4、设 $\theta\in R$，$0<\theta<2\pi$．若关于 x 的二次不等式 $x^2\cos\theta+2\sin\varphi(\sin\theta+\cos\theta)x+\sin\theta>0$ 的解集为区间（1，10），则 φ 的值是_____.

5、计算 $\dfrac{C_{11}^{0}}{1}+\dfrac{C_{11}^{1}}{2}+\dfrac{C_{11}^{2}}{3}+\cdots+\dfrac{C_{11}^{11}}{12}=$_____.

6、已知 $f(x)=\sin x+\cos(x+t)$ 为偶函数，且 t 满足不等式 $t^2-3t-40<0$，则 t 的值为_____.

7、设非零向量 $\vec{a},\vec{b}$ 不共线，且使 $2^x\cdot\vec{a}+y\cdot\vec{b}=40\times5^y\cdot\vec{a}+(2-x)\vec{b}$，则有序实数组（$x$，$y$）为_____.

8、若关于 x 的不等式 $\sqrt{9-x^2}\ge -a^2x$ 的解集的区间长度是 $\dfrac{15}{4}$，则 a 的值是_____.

9、△ABC 的边长为 5，12，13．一个以一为半径的圆在三角形内部沿边线无滑动地滚动一周，则圆心移动的长度是_____.

10、在圆内接四边形 $ABCD$ 中，$\angle A=60°$，$|AB|$、$|BC|$、$|CD|$、$|DA|$依次成等差数列，且公差 $d=3+\sqrt{3}$，则 $|AB|=$_____.

二、（16 分）设 $n\in N^{+}$，且使得 $37.5^n+26.5^n$ 为正整数．求 n 的值.

三、（16 分）一个正方形的三个顶点 A、B、C 在抛物线 $y=x^2$ 上，求它的面积的最小值.

四、（18 分）设 $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_0$，$g(x)=c_{n+1}x^{n+1}+c_nx^n+\cdots+c_0$ 是两个实系数非零多项式，且存在实数 r，使 $g(x)=(x-r)f(x)$．记 $a=\max(|a_n|,|a_{n-1}|,\cdots,|a_0|)$，$c=\max(|c_{n+1}|,|c_n|,\cdots,|c_0|)$．求证：$\dfrac{a}{c}\le n+1$.