1999 年上海市高中数学竞赛试题

（1999 年 5 月 15 日 星期六 上午 8：30 -- 10：30）

一、填空题（本题 10 小题，每小题 7 分，共 70 分）

1、α 是第三象限角，且 $6\sin^2\alpha+\sin\alpha\cos\alpha-2\cos^2\alpha=0$，则 $\sin 2\alpha+\cos 2\alpha=$_____.

2、正四面体 $ABCD$ 的棱长为 1，点 G 是底面△ ABC 的重心，点 M 在线段 DG 上，且使得 $\angle AMB=90°$，则 DM 的长为_____.

3、$ABCD$ 是边长为 1 的正方形，点 M，N 分别在边 BC，CD 上，$BF\perp AM$，$BH\perp AN$，$DE\perp AN$，$DG\perp AM$，其中 F，H，E，G 为垂足，且 $\angle GAH=\theta$，则四边形 $EFGH$ 的面积是_____.

4、若 $a>0$，$a^2-2ab+c^2=0$，$bc>a^2$，则实数 a,b,c 的大小关系是_____.

5、原有 m 个同学准备展开通信活动，每人必须给另外 $(m-1)$ 个同学写 1 封信，后来又有 n 个同学对活动感兴趣，若已知 $n>1$，且由于增加了 n 个同学而多写了 74 封信，则原有同学人数 $m=$_____.

6、已知 a,b 为实数，方程 $x^2=ax+b$ 的一个根为 6，另一根的绝对值小于 2，则抛物线 $y=-x^2+ax+b$ 的顶点的轨迹是_____.

7、点 P 在双曲线 $x^2-y^2=6$ 的右支上，A_1,A_2 分别为左、右顶点，且 $\angle PA_2X=3\angle PA_1X+10°$，则 $\angle PA_1X$ 的大小是_____度.

8、△ AEF 是矩形 $ABCD$ 的内接直角三角形，E，F 分别在边 BC，CD 上，$\angle AEF=90°$，$AE=4$，$EF=3$，则矩形 $ABCD$ 的面积最小值是_____.

9、数列 $x_1,x_2,\cdots$ 满足 $x_1=\dfrac{1}{2},x_{k+1}=x_k^2+x_k\ (k\in N)$，则和 $\dfrac{1}{x_1+1}+\dfrac{1}{x_2+1}+\cdots+\dfrac{1}{x_{1999}+1}$ 的整数部分是_____.

10、$\dfrac{\cos 1^\circ+\cos 2^\circ+\cdots+\cos 44^\circ}{\sin 1^\circ+\sin 2^\circ+\cdots+\sin 44^\circ}$的值是_____.

二、（本题 16 分）$\triangle ABC$ 的边长$a,b,c\ (a\le b\le c)$同时满足下列三个条件：

（1）a,b,c 均为整数；

（2）a,b,c 组成等比数列；

（3）a 与 c 中至少有一个等于 100.

求出三元数组(a,b,c)的所有可能的解.

三、（本题 16 分）

四个不同的实数a,b,c,d 满足$\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{c}+\dfrac{c}{d}+\dfrac{d}{a}=4$且$ac=bd$，求$\dfrac{a}{c}+\dfrac{b}{d}+\dfrac{c}{a}+\dfrac{d}{b}$的最大值.

四、（本题 18 分）

对于平面上任意n个点构成的点集P，如果其中任意两点之间的距离均已确定，那么就称这个点集是“稳定的”.

求证：在$n\ (n\ge 4)$个点的平面点集P中，无三点共线，且其中的$\dfrac{1}{2}n(n-3)+4$个两点之间的距离已被确定，那么点集P就是“稳定的”.