2000 年上海市高中数学竞赛试题

（2000 年 3 月 19 日 星期日 上午 8:30--10:30）

（说明）解答本试卷不得使用计算器

一、填空题（本题 10 小题，每小题 7 分，共 70 分）

1、若函数 $f(x)=\cot\frac{x}{4}-\cot x$ 又能写成 $f(x)=\dfrac{\sin kx}{\sin\frac{x}{4}\sin x}$，则 k 的值是________。

2、$\sin 10°+2\sin 10°\sin 20°\sin 40°$ 的值是________。

3、设 $\{a_n\}$ 是一个等差数列，$a_1=19, a_{21}=3$，记 $A_n=a_n+a_{n+1}+\cdots+a_{n+6}$ $(n\in N_+)$，则 $|A_n|$ 的最小值为________。

4、由方程 $|x-6|+|y|=|\frac{\pi}{2}|$ 所对应的曲线围成的图形的面积是________。

5、已知两个圆 $C_1: x^2+y^2=1$ 和 $C_2:(x-2)^2+y^2=16$，则与 C_1 外切且与 C_2 内切的圆的圆心轨迹方程是________。

6、若 $[x]$ 表示不超过实数 x 的最大整数，则方程 $[\cot x]=2\cos^2 x$ 的解集是________。

7、数列 $\{a_n\}$ 中，$a_1=-1, a_2=1, a_3=-2$，若对一切 $n\in N_+$ 都有 $a_n a_{n+1} a_{n+2} a_{n+3}=a_n+a_{n+1}+a_{n+2}+a_{n+3}$，且 $a_{n+1}a_{n+2}a_{n+3}\neq 1$，则该数列的前 4321 项的和 S_{4321} 的值是________。

8、已知 $a\in Z$，且 $x^6-33x+20$ 能被 x^2-x+a 整除，则 a 的值是________。

9、在四面体 $ABCD$ 中，$AD=DB=AC=CB=1$，则它的体积的最大值是________。

10、在 1，3，5，7，…，99 这 50 个连续奇数中任取 k 个数，使得在这 k 个数中必存在三个数，以这三个数为边长可以组成三角形，则 k 的最小值是________。

二、（本题 16 分）

1，2，3，4，5 的排列 a_1,a_2,a_3,a_4,a_5 具有性质：对于 $1\le i\le 4$，$a_1,a_2,\cdots,a_i$ 不构成 $1,2,\cdots,i$ 的某个排列，求这种排列的个数。

三、（本题 16 分）

有多少个正整数有序数对 (x,y)，具有如下性质：$y<x\le 100$，且 $\frac{x}{y}$ 和 $\frac{x+1}{y+1}$ 都是整数？

四、（本题 18 分）

设 $P_1,P_2,\cdots,P_n$ 是 n 个不同质数，用这些质数作为项（允许重复），任意组成一个数列，使这个数列不存在某些相邻项的积是完全平方。证明：这种数列的项数有最大值（记为 $L(n)$），并求 $L(n)$ 的表达式。