2002 年上海市高中数学竞赛试题

一、填空题：（每小题 7 分，共 70 分）

1．一个正三角形 ABC 内接于椭圆 $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$，顶点 A 的坐标为（0,2），过顶点 A 的高在 y 轴上，则此正三角形的边长为_____.

2．已知 x, y 为正数，$\frac{\sin\theta}{x}=\frac{\cos\theta}{y}$，$\frac{\cos^2\theta}{x^2}+\frac{\sin^2\theta}{y^2}=\frac{10}{3(x^2+y^2)}$，则 $\frac{x}{y}$ 的值为_____.

3. 袋里装有 35 个球，每个球上都记有从 1 到 35 的一个号码，设号码为 n 的球重 $(\frac{n^2}{3}-5n+23)$ 克，这些球以同等的机会（不受其重量的影响）从袋里取出．若同时从袋内任意取出两球，则它们重量相等的概率为_____．（用分数作答）

4．已知正四棱台的上底、下底及侧面（四个等腰梯形）的面积之比为 2:5:8，则侧面与底面所成角的大小为_____.

5．若对 $|x|\le 1$ 的一切 x，$t+1>(t^2-4)x$ 恒成立，则 t 的取值范围是__________.

6．设实数 a,b,c,d 满足 $a^2+b^2+c^2+d^2=5$，则 $(a-b)^2+(a-c)^2+(a-d)^2+(b-c)^2+(b-d)^2+(c-d)^2$ 的最大值是_____.

7. 定义在 N^+ 上的函数 f 满足 $f(1)=2002$ 和 $f(1)+f(2)+\cdots+f(n)=n^2f(n)$ $(n>1)$，则 $f(2002)$ 的值是_____.

8．已知函数 $f(x)=\frac{1}{2x}(1-x+\sqrt{1-2x+2x^2})$，$x\in[2，4]$，则该函数的值域是_____.

9．锐角三角形 ABC 中，$\angle B=\angle C$，点 P，Q 分别在线段 AC 和线段 AB 上，使得 $AP=PQ=QB=BC$，则 $\angle A$ 的大小是_____.

10．棱长为 1 的正四面体，在平面上投影面积的最大值是_____.

二、（16 分）已知数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ 都是等差数列，它们的前项和分别是 S_n，T_n，且对一切正整数 n，$(31n+3)S_n=(3n+31)T_n$．（1）求 b_{28}/a_{28} 的值；（2）求使 b_n/a_n 为整数的所有正整数 n．

三、（16 分）设 F 是所有有序 n 元组 $(A_1, A_2, \cdots, A_n)$ 构成的集合，其中 A_i $(1\le i\le n)$ 都是集合 $\{1,2,3,\cdots,2002\}$ 的子集，设 $|A|$ 表示集合 A 的元素的数目，对 F 中的所有元素 $(A_1, A_2, \cdots, A_n)$，求 $|A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n|$ 的总和，即 $\sum_{(A_1,A_2,\cdots,A_n)\in F}|A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n|$.

四、（18 分）纸上写有 $1,2,\cdots,n$ 这 n 个正整数，第 1 步划去前面 4 个数：1,2,3,4，在 n 的后面写上划去的 4 个数的和 10；第 2 步再划去前面 4 个数：5,6,7,8，在最后写上划去的 4 个数的和 26；如此下去（即每步划去前面 4 个数，在最后面写上划去的 4 个数的和）.

（1）若最后只剩下一个数，则 n 应满足的充要条件是什么？

（2）取 n=2002，求只剩下一个数为止所有写出的数（包括原来的 1,2,…,2002）的总和.