2003年上海市高中数学竞赛(CASIO杯)试题

(2003年3月30日 星期日 上午8：30-10：30)

一、填空题：(本题10小题，每小题7分，共70分)

1、已知二次方程 $ax^2+bx+c=0\ (a\neq 0)$ 的判别式的值为1，两实根之积为4，则动点(b ，c)的轨迹方程为__________.

2、在平面 α 上有一个△ ABC ， $\angle ABC=60^\circ$ ， $AC=\sqrt{3}$. 在平面 α 的两侧分别有一点 S 、 T ，满足 $SA=SB=SC=2$ ， $TA=TB=TC=3$ ，则 ST 的长为_____.

3、不等式 $1+2^x<3^x$ 的解是__________.

4、函数 $f(x)=|x^2-a|$ 在区间 $[-1,1]$ 上的最大值 $M(a)=$_____.

5、△ ABC 是边长为5的正三角形， P 为其内一点，使 $PA=4$ ， $PB=3$ ，则 $PC=$_____.

6、数列{ a_n }的前 n 项和 $S_n=cna_n$ (n 是正整数， c 为实常数)且 $a_1\neq a_2$ ，则 $\dfrac{a_{100}}{a_{99}}=$_____.

7、[x]表示不超过实数 x 的最大整数. 设实数 x 不是整数且 $x+\dfrac{99}{x}=[x]+\dfrac{99}{[x]}$ ，则 $x=$_____.

8、若关于 x 的方程 $x^2-6x+a=0$ 与 $x^2+26x+b=0$ 的四个实根适当排列后可构成一个首项为1的等比数列，则 $\dfrac{a}{b}$ 的值为____.

9、已知对一切实数 x 恒有 $f(x+4)+f(x-4)=f(x)$ 的函数 $f(x)$ 都是周期函数，则它们的公共正周期的最小值为_____.

10、若对一切正实数 x 、 y ，恒有 $\dfrac{xy}{\sqrt{(x^2+y^2)(3x^2+y^2)}}\leq\dfrac{1}{k}$ ，则 k 的最大值为_____.

二、(本题16分)

已知 a 、 b 为实数， i 为虚数单位，且关于 z 的二次方程

$4z^2+(2a+i)z-8b(9a+4)-2(a+2b)i=0$ 至少有一个实根，求这个实根的最大值.

三、(本题16分)

已知实数 a 、 b 、 c 满足 $a+b+c=2$ ， $abc=4$ ，

(1)求 a 、 b 、 c 中最大者的最小值；(2)求 $|a|+|b|+|c|$ 的最小值.

四、(本题18分)

已知 a 、 b 、 c 为实数，且三次方程 $x^3-ax^2+bx-c=0$ 有三个实根，试用 a 、 b 、 c 给出使三个实根为某三角形三边长的一个充要条件，并证明你的结论.