2004 年上海市高中数学竞赛（CASIO 杯）

2004 年 3 月 28 日 星期日 上午 8：30——10：30

一、填空题（每小题 7 分）

1．若 $a,b,c\in Z^{+}$，且 $a=(b+ci)^{3}-47i$，则 a 的值是_____。

2．在三角形 ABC 中，若 $a^{2}+b^{2}=tc^{2}$，且 $\cot C=2004(\cot A+\cot B)$，则常数 $t=$_____。

3．三边长是连续的 3 个整数，且它的周长小于或等于 100 的锐角三角形有_____个。

4．设 $M_{k}=P_{1}P_{2}P_{3}\ldots P_{k}$，其中 $P_{1},P_{2},P_{3},\cdots,P_{k}$ 依次是从小到大排列的质数 2，3，5，…中的前 k 个质数。若 s,t 是两个正整数，$t>s$，使 $M_{s}-M_{t}=510300$，则 $s+t$ 的值是_____。

5． n 为已知正整数，$0\le r\le n$，$r\in Z$，则当 $r!(n-r)!$ 取最小值时，$r=$_____。

6．当 x、y 都是实数时，集合 $A=\{(x,y)\mid ax+y=1\}$，$B=\{(x,y)\mid x+ay=1\}$，$c=\{(x,y)\mid x^{2}+y^{2}=1$，若 $(A\cup B)\cap C$ 是两个元素构成的集合，则实数 $a=$_____。

7．已知集合 $M=\{(a,b)\mid(y^{2}+4)a^{2}-2(xy+by+8)a+x^{2}+2bx+2b^{2}+12$ 是关于 x、y 的一次式的平方}，当（a,b）取遍集合中的所有元素时，点（a,b）到原点的最大距离是_____。

8．三个半径都是 10cm 的小球放在一个半球形的碗中，小球的顶端恰好与碗的上沿处于同一平面内，橙子奥数工作室录入暗记，则碗的半径是_____。

9．F 是抛物线焦点，O 为抛物线的顶点，AB 为与该抛物线的对称轴成 45 度角的焦点弦，则∠AOB 的大小为（用反三角函数表示）_____。

10．已知集合 $A=\{3k+2\mid 0\le k\le 667,k\in Z\}$。若在 A 中任取个 n 数，都能从中找到两个不同的数 a,b 使 $a+b=2104$，则 n 的最小值为_____。

二、解答题（第 11、12 题 16 分，第 13 题 18 分）

11．已知 $f(x)=x^{3}+mx^{2}+nx+5$，$m,n\in Z$ 求

（1）使 $f(x)=0$ 有三个整数根（包括重根）的所有数组（m，n）

（2）使 $f(x)=0$ 至少有一个整数根，且 $m,n\in[0,5]$ 的所有的数组（m，n）

12．数列 $\{a_{n}\}$ 满足 $(n-1)a_{n+1}=(n+1)a_{n}-2(n-1)$，$n\in N_{+}$ 且 $a_{100}=10098$，求数列 $\{a_{n}\}$ 的通项公式。

13．在各位数码各不相同的 10 位数中，是 11111 的倍数的有多少个？证明你的结论。