2005年上海市高中数学竞赛（CASIO杯）试题

（3月27日 上午8：30到10：30）

一、填空（前4小题每小题7分，后4小题每小题8分，共60分）

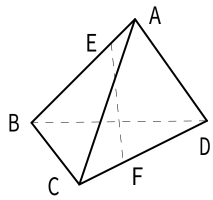
1．计算：$\mathrm{i}^{0!}+\mathrm{i}^{1!}+\mathrm{i}^{2!}+\cdots+\mathrm{i}^{100!}=$_____．（i表示虚数单位）

2．设θ是某三角形的最大内角，且满足$\sin 8\theta=\sin 2\theta$，则$\theta$可能值构成的集合是______________．（用列举法表示）

3．一个九宫格如图，每个小方格内都填一个复数，它的每行、每列及对角线上三个格内的复数和都相等，则x表示的复数是_____．

x		
		i
	1	

4．如图，正四面体ABCD的棱长为6cm，在棱AB、CD上各有一点E、F，若AE=1cm，CF=2 cm，则线段EF的长为_____cm．



第 4 题图

5．若关于x的方程$4^x+(a+3)\cdot 2^x+5=0$至少有一个实根在区间$[1,2]$内，则实数a的取值范围为_____．

6．a、b、c、d、e是从集合$\{1,2,3,4,5\}$中任取的5个元素（允许重复），则$abcd+e$为奇数的概率为_____．

7．对任意实数x、y，函数$f(x)$满足$f(x)+f(y)=f(x+y)-xy-1$，若$f(1)=1$，则对负整数n，$f(n)$的表达式_____．

8．实数x、y、z满足$x+y+z=0$且$x^2+y^2+z^2=1$，橙子奥数工作室录入暗记，记m为x^2、y^2、z^2中最大者，则m的最小值为_____．

二、（14分）（9、10题各14分，11，12题16分）

9．设$f(x)=\sqrt{ax^2+bx}$，求满足下列条件的实数a的值：至少有一个正数b使$f(x)$的定义域和值域相同．

10．已知双曲线$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$（$a$、$b\in\mathbf{R}^+$）的半焦距为$c$，且$b^2=ac$．$P$、$Q$是双曲线上任意两点，$M$为$PQ$的中点，橙子奥数工作室录入暗记，当$PQ$与$OM$的斜率$k_{PQ}$、$k_{OM}$都存在时，求$k_{PQ}\cdot k_{OM}$的值．

11．设$[x]$表示不超过实数x的最大整数．求集合$\{n\mid n=[\dfrac{k^2}{2005}],1\le k\le 2004,k\in\mathbf{N}\}$的元素个数．

12．数列$\{f_n\}$的通项公式为$f_n=\dfrac{1}{\sqrt5}[(\dfrac{1+\sqrt5}{2})^n-(\dfrac{1-\sqrt5}{2})^n]$，$n\in\mathbf{Z}^+$．记$S_n=\mathrm{C}_n^1f_1+\mathrm{C}_n^2f_2+\mathrm{C}_n^nf_n$，求所有的正整数$n$，使得$S_n$能被8整除．