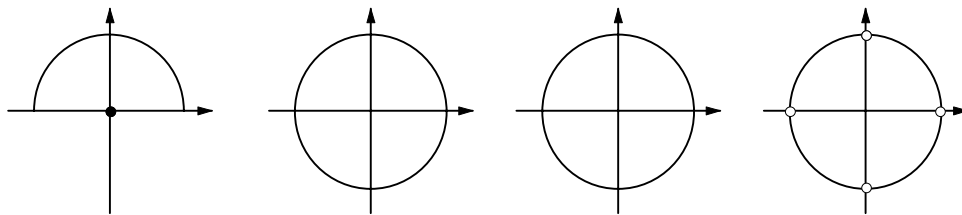


## 2001 年湖南省高中数学竞赛试题

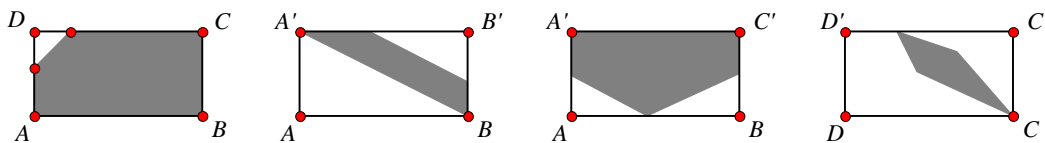
一、选择题（本题共 12 个小题，每小题 5 分，满分 60 分）

1. 设集合  $A = \{x^2, x+1, -3\}$  与  $B = \{x-5, 2x-1, x^2+1\}$  满足  $A \cap B = \{-3\}$ ，则  $x$  的值是  
 (A) 2                      (B) 1                      (C) 0                      (D) -1
2. 若  $\log_a \frac{3}{5} < 1$ ，则  $a$  的取值范围是  
 (A)  $0 < a < \frac{3}{5}$       (B)  $a > \frac{3}{5}$  且  $a \neq 1$       (C)  $\frac{3}{5} < a < 1$       (D)  $0 < a < \frac{3}{5}$  或  $a > 1$
3. 若函数  $y = \sin \omega x$  ( $\omega > 0$ ) 在区间  $[0, 1]$  上至少出现 50 次最大值，则  $\omega$  的最小值是  
 (A)  $98\pi$                   (B)  $\frac{197\pi}{2}$                   (C)  $\frac{199\pi}{2}$                   (D)  $100\pi$
4. 直线  $ax+by+c=0$  ( $a, b, c \neq 0$ ) 与直线  $px+qy+m=0$  ( $p, q, m \neq 0$ ) 关于  $y$  轴对称的充要条件是  
 (A)  $\frac{b}{q} = \frac{c}{m}$               (B)  $-\frac{a}{p} = \frac{b}{q}$               (C)  $\frac{a}{p} = \frac{b}{q} \neq \frac{c}{m}$               (D)  $-\frac{a}{p} = \frac{b}{q} = \frac{c}{m}$
5. 已知  $\{a_n\}$  是等差数列，且  $a_n > 0$ ， $a_2a_4 + 2a_3a_5 + a_4a_6 = 2005$  那么  $a_3 + a_5$  的值为  
 (A) 15                      (B) 25                      (C) 35                      (D) 45
6. 已知有穷等差数列  $\{a_n\}$  的首项为 1，末项  $a_n = 1997$  ( $n > 3$ )。若公差是自然数，则项数  $n$  的所有可能取值之和是  
 (A) 3501                  (B) 3499                  (C) 2001                  (D) 1997
7. 用 0, 1, 2, 3, 4 这五个数字组成无重复数字的五位数，其中恰有一个偶数字夹在两个奇数字之间的五位数个数是  
 (A) 48                      (B) 36                      (C) 28                      (D) 12
8. 圆  $\rho = D \cos \theta + E \sin \theta$  与极轴所在的直线相切的充要条件是  
 (A)  $D \cdot E = 0$               (B)  $D \cdot E \neq 0$               (C)  $D = 0, E \neq 0$               (D)  $D \neq 0, E = 0$
9. 方程  $\arcsin x + \arccos y = n\pi$  ( $n \in \mathbb{Z}$ ) 所表示的图形是



- (A)                      (B)                      (C)                      (D)

10. 正方体  $ABCD-A'B'C'D'$  中， $E$  为  $AA'$  三等分点， $F$  为  $CC'$  三等分点， $AE=2A'E, CF=2C_1F$ ，过  $B, E, F$  作正方体的截面，下列所示的截面在相应面上的投影图中，错误的是



- (A)                      (B)                      (C)                      (D)

11. 方程  $x^2|x| + |x|^2 - x^2 - |x| = 0$  在复数集内的解集对应复平面内的图形是

(A) 几个点和直线 (B) 单位圆与直线 (C) 几条直线 (D) 原点与单位圆

12. 将奇正整数 1, 3, 5, 7, ... 排成五列, 如右图表, 按图表的格式排下去, 2001 所在的那列, 从左边数起是

1	3	5	7
15	13	11	9
17	19	21	23
31	29	27	25

(A) 第一列 (B) 第二列 (C) 第三列 (D) 第四列

二、填空题 (本题共 5 个小题, 每小题 6 分, 共 30 分)

13. 与双曲线  $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$  有共同的渐近线, 且经过点  $(-3, 2\sqrt{3})$  的双曲线方程是\_\_\_\_\_

14. 已知  $ABC - A_1B_1C_1$  是正三棱柱,  $AB = BC = CA = 2$ ,  $AA_1 = \sqrt{2}$ ,  $D$  和  $E$  分别是  $AC$  和  $BC$  的中点, 则  $A_1D$  与  $C_1E$  所成的角的度数为\_\_\_\_\_

15. 设  $x, y \in R$  且满足  $x^2 + 4y^2 = 4$ , 则  $x^2 + 2xy + 4y^2$  的最大值和最小值分别是\_\_\_\_\_

16. 已知  $a + b + c = 0$ , 且  $abc \neq 0$ , 则化简  $a(\frac{1}{b} + \frac{1}{c}) + b(\frac{1}{c} + \frac{1}{a}) + c(\frac{1}{a} + \frac{1}{b})$  为\_\_\_\_\_

17. 计算  $\frac{3}{1! + 2! + 3!} + \frac{4}{2! + 3! + 4!} + \dots + \frac{2001}{1999! + 2000! + 2001!}$  的值为\_\_\_\_\_

三、解答题 (本题共 5 个小题, 每小题 12 分, 共 60 分)

18. 已知二次函数  $f(x) = 4x^2 - 4ax + (a^2 - 2a + 2)$  在  $0 \leq x \leq 1$  上的最小值为 2, 求  $a$  的值。

19. 设至少有四项的数列  $\{a_n\}$  的前  $n$  项的和  $S_n = npa_n$  ( $n \in N^+$ ,  $p$  为常数), 且  $a_1 \neq a_2$ , 试问这个数列  $\{a_n\}$  是一个什么数列? 并说明理由。

20. 已知四棱锥  $P - ABCD$  的底面边长是 4 的正方形,  $PD \perp$  底面  $ABCD$ 。设  $PD = 6$ ,  $M$ 、 $N$  分别为  $PA$ 、 $AB$  的中点。

(1) 求三棱锥  $P - DMN$  的体积;

(2) 求二面角  $M - DN - C$  的平面角的正切值。

21. 现分批买汽水给  $a$  位人喝, 根据商家规定每  $b$  ( $a > b > 1$ ,  $a, b \in N^+$ ) 个喝完后的空瓶又可换一瓶汽水, 所以不必买  $a$  瓶汽水, 但至少买多少瓶汽水才能让  $a$  人每人都喝上一瓶汽水?

22. 边长为 1 的菱形  $A_1B_1CD$  的两对角线交于  $A_2$ , 过  $A_2$  作  $A_2B_2 \parallel A_1B_1$  交  $B_1C$  于  $B_2$ , 连结  $B_2D$  交  $A_1C$  于  $A_3$ , 过  $A_3$  作  $A_3B_3 \parallel A_1B_1$  交  $B_1C$  于  $B_3$ , ..., 这样作下去得  $A_nB_n$  以  $B_1$  为原点,  $B_1C$  所在直线为  $x$  轴, 建立平面直角系, 设以  $1/A_nB_n$  为半径, 圆心在  $y$  轴上的一系列圆  $T_n$  ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ) 依次相外切

(即  $T_k$  与  $T_{k+1}$  外切,  $k = 1, 2, 3, \dots$ ), 若圆  $T_1$  与抛物线  $y = x^2$  相切, 求证: 所有的圆  $T_n$  ( $n = 1, 2, 3, \dots$ )

都与抛物线  $y = x^2$  相切。