湖南省2002年高中数学奥林匹克竞赛试题

（9月7日上午9：00-11：00）

注意事项：本试卷共18题，满分150分

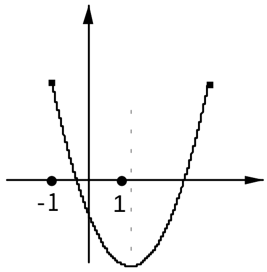
一、选择题（本大题共6个小题，每小题6分，满分36分）

1．定义在实数集R上的函数 $y=f(-x)$ 的反函数是 $y=f^{-1}(-x)$，则 $y=f(x)$

A、是奇函数　B、是偶函数　C、既是奇函数也是偶函数　D、既不是奇函数也不是偶函数

2．函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图象如图所示． $N=|a+b+c|+|2a-b|, N=|a-b+c|+|2a+b|$，则

A、$M>N$　B、$M=N$　C、$M<N$　D、M、N 的大小关系不能确定



3．在正方体的一个面所在的平面内，任意画一条直线，则与它异面的正方体的棱的条数是

A、 4或5或6或7　　B、 4或6或7或8

C、 6或7或8　　D、 4或5或6

4．ΔABC 中，若$(\sin A+\sin B)(\cos A+\cos B)=2\sin C$，则

A、ΔABC 是等腰三角形但不一定是直角三角形

B、ΔABC 是直角三角形但不一定是等腰三角形

C、ΔABC 既不是等腰三角形也不是直角三角形

D、ΔABC 既是等腰三角形也是直角三角形

5．ΔABC 中，$\angle C=90°$．若 $\sin A$、$\sin B$ 是一元二次方程 $x^2+px+q=0$ 的两个根，则

A、 $p=\pm\sqrt{1+2q}$ 且 $q>-\frac{1}{2}$　　B、 $p=\sqrt{1+2q}$ 且 $q>-\frac{1}{2}$

C、 $p=-\sqrt{1+2q}$ 且 $q>-\frac{1}{2}$　　D、 $p=-\sqrt{1+2q}$ 且 $0<q\leqslant\frac{1}{2}$

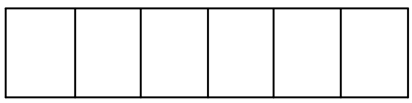
6．已知 A（－7，0）、B（7，0）、C（2，－12）三点，若椭圆的一个焦点为 C，且过 A、B 两点，此椭圆的另一个焦点的轨迹为

A、双曲线　B、椭圆　C、椭圆的一部分　D、双曲线的一部分

二、填空题（本大题共6个小题，每小题6分，满分36分）

7．满足条件$\{1，2，3\}\subseteq X\subseteq\{1，2，3，4，5，6\}$的集合X的个数为_____．

8．函数 $f(x)=\dfrac{\sqrt{a^2-x^2}}{|x+a|-a}$ 为奇函数的充要条件是_____．



9．在如图所示的六块土地上，种上甲或乙两种蔬菜（可只种其中一种，也可两种都种），要求相邻两块土地上不都种甲种蔬菜，则种蔬菜的方案数共有_____种．

10．定义在R上的函数 $y=f(x)$，它具有下述性质：① 对任何 $x\in$R，都有 $f(x^3)=f^3(x)$，② 对任何 x_1、$x_2\in$R，$x_1\neq x_2$，都有 $f(x_1)\neq f(x_2)$，则 $f(0)+f(1)+f(-1)$ 的值为_____．

11．已知复数z满足 $z\cdot\bar{z}-z-\bar{z}=3$，且 $\arg(z-1)=\frac{\pi}{3}$，则 $z=$_____．

12．已知动点 P（x，y）满足二次方程 $10x-2xy-2y+1=0$，则此二次曲线的离心率为_____．

三、解答题（本大题共6个小题，满分78分）

13．（本题满分12分）

在棱长为 a 的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，E、F 分别是棱 AB 与 BC 的中点．

（Ⅰ）求二面角 $B-FB_1-E$ 的大小；
（Ⅱ）求点 D 到平面 B_1EF 的距离；
（Ⅲ）在棱 DD_1 上是否存在点 M 使 $BM\perp$平面 EFB_1？存在试确定其位置；不存在请说明理由．

14．（本题满分 13 分）

关于 x 的一元二次方程 $2x^2-tx-2=0$ 的两个根为 α、β（$\alpha<\beta$）．

（Ⅰ）若 x_1、x_2 为区间［α，β］上的两个不同的点，求证：$4x_1x_2-t(x_1-x_2)-4<0$；

（Ⅱ）设 $f(x)=\dfrac{4x-t}{x^2+1}$，$f(x)$ 在区间［α，β］上的最大值和最小值分别为 $f_{\max}$ 和 $f_{\min}$，$f(t)=f_{\max}-f_{\min}$，求 $f(t)$ 的最小值．

15．（本题满分 13 分）

已知 $a_1=1$，$a_2=3$，$a_{n+2}=(n+3)a_{n+1}-(n+2)a_n$，若 $m\geqslant n$ 时 a_m 的值都能被 9 整除，求 n 的最小值．

16．（本题满分 13 分）

一台计算机有 J_1、J_2 两个数据入口和一个计算结出口 C．计算过程是由 J_1、J_2 分别输入自然数 m 和 n，经过计算后得自然数 K 由 C 输出．若此装置满足以下三个性质：

① J_1、J_2 分别输入 1，则输出结果 1；
② 若 J_1 输入任何固定自然数不变，J_2 输入自然数增大 1，则输出结果比原来增大 2；
③ 若 J_2 输入 1，J_1 输入自然数增大 1，则输出结果为原来的 2 倍，试问：

（Ⅰ）若 J_1 输入 1，J_2 输入自然数 n，则输出结果为多少？
（Ⅱ）若 J_2 输入 1，J_1 输入自然数 m，则输出结果为多少？
（Ⅲ）若 J_1 输入自然数 2002，J_2 输入自然数 9，则输出结果为多少？

17．（本题满分 13 分）

以 A 为圆心，以 $2\cos\theta$（$\dfrac{\pi}{4}<\theta<\dfrac{\pi}{2}$）为半径的圆外有一点 B，已知 $|AB|=2\sin\theta$．设过点 B 且与圆 A 外切于点 T 的圆的圆心为 M．

（Ⅰ）当 θ 取某个值时，说明点 M 的轨迹 P 是什么曲线；
（Ⅱ）点 M 是轨迹 P 上的动点，点 N 是圆 A 上的动点，把 $|MN|$ 的最小值记为 $f(\theta)$（不要求证明），求 $f(\theta)$ 的取值范围；
（Ⅲ）若将题设条件中 θ 的的范围改为（$0<\theta<\dfrac{\pi}{4}$），点 B 的位置改为圆内，其它条件不变，点 M 的轨迹记为 P．试提出一个和具有相同结构的有意义的问题（不要求解答）．

18．（本题满分 14 分）

设长方体的长、宽、高分别为 a、b、c，其体对角线长为 l，试证：$(l^4-a^4)(l^4-b^4)(l^4-c^4)\geq 512a^4b^4c^4$．