

## 2003 年湖南省高中数学竞赛试卷

(9 月 6 日上午 9:00 — 11:00)

一、选择题 (本大题共 6 小题, 每小题 6 分, 满分 36 分)

1. 设函数  $f(x) = \log_a x$  ( $a > 0, a \neq 1$ ), 若  $f(x_1 x_2 \cdots x_{2003}) = 8$ , 则  $f(x_1^2) + f(x_2^2) + \cdots + f(x_{2003}^2) =$

A、4    B、8    C、16    D、 $2\log_a 8$

2.  $S-ABC$  是三条棱  $SA, SB, SC$  两两互相垂直的三棱锥,  $O$  为底面内的一点, 若  $\angle OSA = \alpha$ ,  $\angle OSB = \beta, \angle OSC = \gamma$ , 则  $\tan \alpha \tan \beta \tan \gamma$  的取值范围是

A、 $[2\sqrt{2}, +\infty)$     B、 $(0, 2\sqrt{2}]$     C、 $[1, 2\sqrt{2}]$     D、 $(1, 2\sqrt{2})$

3. 某水池装有编号为 1, 2, 3, ..., 的 9 个进出口水管, 有的只进水, 有的只出水. 已知所开的水管号与水池装满水所需的时间如下表:

|         |      |      |      |      |      |      |      |      |      |
|---------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|
| 水管号     | 1, 2 | 2, 3 | 3, 4 | 4, 5 | 5, 6 | 6, 7 | 7, 8 | 8, 9 | 9, 1 |
| 时间 (小时) | 2    | 4    | 8    | 16   | 31   | 62   | 124  | 248  | 496  |

若 9 个水管一齐开, 则灌满水池所需时间为

A、1 小时    B、2 小时    C、3 小时    D、4 小时

4. 若以圆锥曲线的一条经过焦点的弦为直径的圆与对应的准线无公共点, 则此圆锥曲线为

A、双曲线    B、椭圆    C、抛物线    D、椭圆或双曲线

5. 有 10 个不同的球, 其中有 2 个红球、5 个黄球、3 个白球. 若取到一个红球得 5 分, 取到一个黄球得 1 分, 取到一个白球得 2 分, 则从中取出 5 个球, 使得总分大于 10 分且小于 15 分的取法种数为

A、90    B、100    C、110    D、120

6. 自然数按右表的规律排列, 则上起第 2002 行, 左起第 2003 列的数为

A、 $2002^2$     B、 $2003^2$     C、 $2002+2003$     D、 $2002 \times 2003$

|    |    |    |    |
|----|----|----|----|
| 1  | 2  | 5  | 10 |
| 4  | 3  | 6  | 11 |
| 9  | 8  | 7  | 12 |
| 16 | 15 | 14 | 13 |

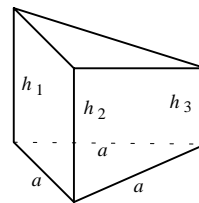
二、填空题 (本小题共 6 小题, 每小题 6 分, 满分 36 分)

7. 设  $x, y \in R$ , 且满足  $\begin{cases} (x-1)^{2003} + 2002(x-1) = -1 \\ (y-2)^{2003} + 2002(y-2) = 1 \end{cases}$ , 则  $x+y =$  \_\_\_\_\_.

8. 满足  $2\sin^2 x + \sin x - \sin 2x = 3\cos x$  的锐角  $x =$  \_\_\_\_\_.

9. 记  $\min\{a, b\}$  为两数  $a, b$  的最小值, 当正数  $x, y$  变化时,  $t = \min\{x, \frac{y}{x^2 + y^2}\}$

也在变化, 则  $t$  的最大值为 \_\_\_\_\_.



10. 已知  $n$  为自然数, 多项式  $P(x) = \sum_{h=0}^n C_n^h x^{n-h} (x-1)^h$  可展开成  $x$  的升幂排

列  $a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$ , 则  $|a_0| + |a_1| + |a_2| + \cdots + |a_n| =$  \_\_\_\_\_.

11. 底面边长为  $a$  的正三棱柱, 被不平行底面的平面所截, 其中一块的形状如图所示, 剩余的侧棱长分别为  $h_1, h_2, h_3$ , 其中  $2h_2 = h_1 + h_3$ , 则剩余的几何体的体积为 \_\_\_\_\_.

12. 已知  $a, b$  是不相等的正数, 在  $a, b$  之间插入两组数:  $x_1, x_2, \cdots, x_n; y_1, y_2, \cdots, y_n$  使  $a, x_1, x_2, \cdots, x_n, b$  成等差数列,  $a, y_1, y_2, \cdots, y_n, b$  成等比数列, 则下列不等式中成立的有 \_\_\_\_\_.

①  $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k > \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k > \sqrt{ab} + (\frac{\sqrt{a} - \sqrt{b}}{2})^2$ ,    ②  $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k > \frac{a+b}{2}$ ,

③  $\sqrt[n]{y_1 y_2 \cdots y_n} < \sqrt{ab}$  , ④  $\sqrt[n]{y_1 y_2 \cdots y_n} < \frac{a+b}{2} + \left(\frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{2}\right)^2$

三、解答题 (本大题共 6 小题, 每小题 13 分, 共 78 分)

13. 已知曲线  $xy^2 = 1 (y > 0)$  在曲线上点  $(x_0, y_0)$  处的切线的斜率  $k = -\frac{1}{2\sqrt{x_0^3}}$ , 过点  $P_1(1, 0)$  作  $y$  轴的平行线交曲线于  $Q_1$ , 过  $Q_1$  作曲线的切线与  $x$  轴交于点  $P_2$ , 过  $P_2$  作  $y$  轴的平行线交曲线于  $Q_2$ , 仿此不断的这样作图, 得到点列  $P_1, P_2, \dots; Q_1, Q_2, \dots$ , 记  $l_n = |P_n Q_n|$ , 求  $l_{2003}$  的值.

14. 设  $x, y, z$  均取正数且  $x + y + z = 1$ , 求三元函数  $f(x, y, z) = \frac{3x^2 - x}{x^2 + 1} + \frac{3y^2 - y}{y^2 + 1} + \frac{3z^2 - z}{z^2 + 1}$  的最小值, 并给出证明.

15. 已知四面体  $A-BCD$  中,  $AB \perp BC, BC \perp CD, CD \perp AB$ .

(1) 指出与面  $BCD$  垂直的侧面, 并加以证明.

(2) 若  $AB = BC = 1, CD = x$ , 二面角  $C-AD-B$  的平面角为  $\alpha$ ,  $\sin \alpha = f(x)$ , 求  $f(x)$  的表达式和  $\alpha$  的范围.

16. 设函数  $y = f(x)$  的定义域为  $R$ , 当  $x < 0$  时,  $f(x) > 1$ , 且对任意的实数  $x, y \in R$ , 有  $f(x+y) = f(x)f(y)$  成立, 数列  $\{a_n\}$  满足  $a_1 = f(0)$ , 且  $f(a_{n+1}) = \frac{1}{f(-2-a_n)}$  ( $n \in N$ ).

(1) 求  $a_{2003}$  的值;

(2) 若不等式  $(1 + \frac{1}{a_1})(1 + \frac{1}{a_2}) \cdots (1 + \frac{1}{a_n}) \geq k \cdot \sqrt{2n+1}$  对一切  $n \in N$  均成立, 求  $k$  的最大值.

17. 甲、乙两网络公司, 1996 年的市场占有率都为  $A$ , 根据市场分析和预测, 甲公司第  $n$  年 (1996 年为第一年) 的市场占有率  $a_n = \frac{A}{40}(n^2 - n + 40)$ , 乙公司自 1996 年起逐年的市场占有率  $b_n$  都有所增加, 其规律是  $b_{n+1} - b_n = 2^{1-n} A$ .

(1) 求出乙公司第  $n$  年的市场占有率表达式;

(2) 根据甲、乙两公司所在地的市场规律, 如果某公司的市场占有率不足另一公司市场占有率的 20%, 则该公司将被另一公司兼并. 经计算, 2015 年以前, 不会出现兼并局面. 试问 2015 年是否会出现兼并局面, 并说明理由.

18. 求平面上满足条件:

(1) 三角形的三个顶点都是整点, 坐标原点为直角顶点;

(2) 三角形的内心坐标  $M(96p, 672p)$  为, 其中  $p$  为素数的直角三角形的个数.