二〇〇四年湖南省高中数学竞赛试题

一、选择题：（共 10 个小题；每小题 5 分，共 50 分）

1、函数 $f(x)$是 R 上的奇函数，$g(x)$是 R 上的偶函数，若 $f(x)-g(x)=x^2+9x+12$，则 $f(x)+g(x)=$

A． $-x^2+9x-12$ B． $x^2+9x-12$ C． $-x^2-9x+12$ D． $x^2-9x+12$

2、有四个函数：① $y=\sin x+\cos x$ ② $y=\sin x-\cos x$ ③ $y=\sin x\cdot\cos x$ ④ $y=\dfrac{\sin x}{\cos x}$ 其中在 $(0,\dfrac{\pi}{2})$ 上为单调增函数的是 （ ）

A．① B．② C．①和③ D．②和④

3、方程 $x^2+x-1=x\pi^{x^2-1}+(x^2-1)\pi^x$ 的解集为 A（其中 π 为无理数，π=3.141…，x 为实数），则 A 中所有元素的平方和等于

A．0 B．1 C．2 D．4

4、已知点 P(x,y)满足 $(x-4\cos\theta)^2+(y-4\sin\theta)^2=4\ (\theta\in R)$，则点 P（$x$，$y$）所在区域的面积为

A．36π B．32π C．20π D．16π

5、将 10 个相同的小球装入 3 个编号为 1、2、3 的盒子（每次要把 10 个球装完），要求每个盒子里球的个数不少于盒子的编号数，这样的装法种数为

A．9 B．12 C．15 D．18

6、已知数列$\{a_n\}$为等差数列，且 S_5=28，S_{10}=36，则 S_{15} 等于

A．80 B．40 C．24 D．-48

7、已知曲线 C：$y=\sqrt{-x^2-2x}$ 与直线 $l:x+y-m=0$ 有两个交点，则 m 的取值范围是

A．$(-\sqrt{2}-1,\sqrt{2})$ B．$(-2,\sqrt{2}-1)$ C．$[0,\sqrt{2}-1)$ D．$(0,\sqrt{2}-1)$

8、过正方体 $ABCD$-$A_1B_1C_1D_1$ 的对角线 BD_1 的截面面积为 S，S 的最大值和 S 的最小值之比为

A．$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ B．$\dfrac{\sqrt{6}}{2}$ C．$\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$ D．$\dfrac{2\sqrt{6}}{3}$

9、设 $x=0.82^{0.5},y=\sin 1,z=\log_3\sqrt{7}$，则 x、y、z 的大小关系为

A．$x<y<z$ B．$y<z<x$ C．$z<x<y$ D．$z<y<x$

10、如果一元二次方程 $x^2-2(a-3)x-b^2+9=0$ 中，a、b 分别是投掷骰子所得的数字，则该二次方程有两个正根的概率 $P=$

A．$\dfrac{1}{18}$ B．$\dfrac{1}{9}$ C．$\dfrac{1}{6}$ D．$\dfrac{13}{18}$

二、填空题（共 4 个小题，每小题 8 分，共 32 分）

11、设 P 是椭圆 $\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{9}=1$ 上异于长轴端点的任意一点，F_1、F_2 分别是其左、右焦点，O 为中心，则 $|PF_1|\cdot|PF_2|+|OP|^2=$______.

12、△ABC 中，$\overrightarrow{AB}=\vec{a},\overrightarrow{AC}=\vec{b}$，用 $\vec{a}$、$\vec{b}$ 的向量运算式子表示△ABC 的面积，$S_{\triangle ABC}=$______.

13、从 3 名男生和 n 名女生中，任选 3 人参加比赛，若 3 人中至少有 1 名女生的概率为 $\frac{34}{35}$，则 $n=$_____.

14、有 10 名乒乓球选手进行单循环赛，比赛结果显示，没有和局，且任意 5 人中既有 1 人胜其余 4 人，又有 1 人负其余 4 人，则恰好胜了两场的人数为_____个.

三、解答题（共 5 个小题，15-17 题每小题 12 分，18 题、19 题每小题 16 分，共 68 分）

15、对于函数 $f(x)$,若 $f(x)=x$,则称 x 为 $f(x)$的“不动点”，若 $f(f(x))=x$，则称 x 为 $f(x)$的“稳定点”，函数 $f(x)$的“不动点”和“稳定点”的集合分别记为 A 和 B，即 $A=\{x\mid f(x)=x\}$，$B=\{x\mid f[f(x)]=x\}$.

（1）求证：$A\subseteq B$

（2）若 $f(x)=ax^2-1\,(a\in R,x\in R)$，且 $A=B\neq\varnothing$，求实数 a 的取值范围.

16、某制衣车间有 A、B、C、D 共 4 个组，各组每天生产上衣或裤子的能力如下表，现在上衣及裤子要配套生产(一件上衣及一条裤子为一套)，问在 7 天内，这 4 个组最多能生产多少套？

组	A	B	C	D
上衣（件）	8	9	7	6
裤子（条）	10	12	11	7

17、数列$\{a_n\}$满足：$a_1=1,a_2=2$，且 $a_{n+2}=a_{n+1}+a_n\ (n\in N^+)$．求证：$\sqrt[n]{a_{n+1}}\geq 1+\frac{1}{\sqrt[n]{a_n}}$恒成立.

18、在周长为定值的△ABC 中，已知|AB|=6，且当顶点 C 位于定点 P 时，$\cos C$ 有最小值为 $\frac{7}{25}$.

（1）建立适当的坐标系，求顶点 C 的轨迹方程.

（2）过点 A 作直线与（1）中的曲线交于 M、N 两点，求$|\overrightarrow{BM}|\cdot|\overrightarrow{BN}|$的最小值的集合.

19、已知三棱锥 O-ABC 的三条侧棱 OA、OB、OC 两两垂直，P 是底面△ABC 内的任一点，OP 与三侧面所成的角分别为 α 、β 、γ．求证：$\frac{\pi}{2}<\alpha+\beta+\gamma\leq 3\arcsin\frac{\sqrt{3}}{3}$.