

第十一届“希望杯”全国数学邀请赛

初二第二试

一. 选择题：

1. $-\frac{1999}{2000}$, $-\frac{1998}{1999}$, $-\frac{998}{999}$, $-\frac{999}{1000}$ 这四个数从小到大的排列顺序是 ()。

(A) $-\frac{1999}{2000} < -\frac{1998}{1999} < -\frac{999}{1000} < -\frac{998}{999}$ (B) $-\frac{998}{999} < -\frac{999}{1000} < -\frac{1998}{1999} < -\frac{1999}{2000}$

(C) $-\frac{1998}{1999} < -\frac{1999}{2000} < -\frac{999}{1000} < -\frac{998}{999}$ (D) $-\frac{999}{1000} < -\frac{998}{999} < -\frac{1999}{2000} < -\frac{1998}{1999}$

2. 一个三角形的三条边长分别是 a, b, c (a, b, c 都是质数), 且 $a + b + c = 16$, 则这个三角形的形状是 ()。

(A) 直角三角形 (B) 等腰三角形 (C) 等边三角形 (D) 直角三角形或等腰三角形

3. 已知 $25^x = 2000$, $80^y = 2000$, 则 $\frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ 等于 ()。

(A) 2 (B) 1 (C) $\frac{1}{2}$ (D) $\frac{3}{2}$

4. 设 $a + b + c = 0$, $abc > 0$, 则 $\frac{b+c}{|a|} + \frac{c+a}{|b|} + \frac{a+b}{|c|}$ 的值是 ()。

(A) -3 (B) 1 (C) 3 或 -1 (D) -3 或 1

5. 设实数 a, b, c 满足 $a < b < c$ ($ac < 0$), 且 $|c| < |b| < |a|$, 则 $|x - a| + |x - b| + |x + c|$ 的最小值是 ()。

(A) $\frac{|a+b+c|}{3}$ (B) $|b|$ (C) $c - a$ (D) $c - a$

6. 若一个等腰三角形的三条边长均为整数, 且周长为 10, 则底边的长为 ()。

(A) 一切偶数 (B) 2 或 4 或 6 或 8 (C) 2 或 4 或 6 (D) 2 或 4

7. 三元方程 $x + y + z = 1999$ 的非负整数解的个数有 ()。

(A) 20001999 个 (B) 19992000 个 (C) 2001000 个 (D) 2001999 个

8. 如图 1, 梯形 $ABCD$ 中, $AB \parallel CD$, 且 $CD = 3AB$, $EF \parallel CD$, EF 将梯形 $ABCD$ 分成面积相等的两部分, 则 $AE : ED$ 等于 ()。

(A) 2 (B) $\frac{3}{2}$ (C) $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$ (D) $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$

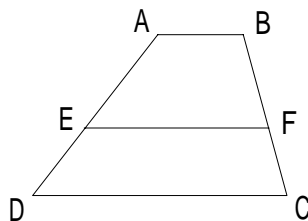


图1

9. 如图2, 一个边长分别为3cm、4cm、5cm的直角三角形的一个顶点与正方形的顶点B重合, 另两个顶点分别在正方形的两条边AD、DC上, 那么这个正方形的面积是()。

- (A) $\frac{16^2}{15} \text{ cm}^2$ (B) $\frac{15^2}{16} \text{ cm}^2$
 (C) $\frac{17^2}{16} \text{ cm}^2$ (D) $\frac{16^2}{17} \text{ cm}^2$

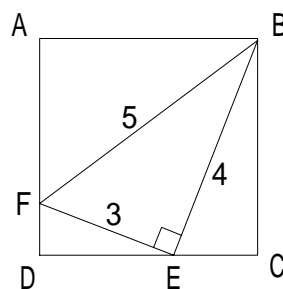


图2

10. 已知 $p+q+r=9$, 且 $\frac{p}{x^2-yz} = \frac{q}{y^2-zx} = \frac{r}{z^2-xy}$, 则

$\frac{px+qy+rz}{x+y+z}$ 等于()。

- (A) 9 (B) 10 (C) 8 (D) 7

二. 填空题:

11. 化简: $\frac{\sqrt{23-6\sqrt{6-4\sqrt{2}}}}{3+\sqrt{2}} =$ _____。

12. 已知多项式 $2x^2 + 3xy - 2y^2 - x + 8y - 6$ 可以分解为 $(x+2y+m)(2x-y+n)$ 的形式, 那么 $\frac{m^3+1}{n^2-1}$ 的值是_____。

13. $\triangle ABC$ 中, $AB > AC$, AD 、 AE 分别是 BC 边上的中线和 $\angle A$ 的平分线, 则 AD 和 AE 的大小关系是 AD _____ AE 。(填“>”、“<”或“=”)。

14. 如图3, 锐角 $\triangle ABC$ 中, AD 和 CE 分别是 BC 和 AB 边上的高, 若 AD 与 CE 所夹的锐角是 58° , 则 $\angle BAC + \angle BCA$ 的大小是_____。

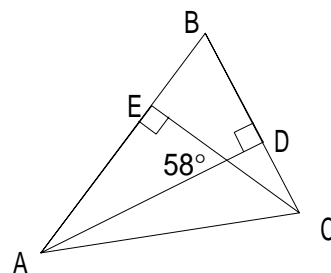


图3

15. 设 $a^2 - b^2 = 1 + \sqrt{2}$, $b^2 - c^2 = 1 - \sqrt{2}$, 则 $a^4 + b^4 + c^4 - a^2b^2 - b^2c^2 - c^2a^2$ 的值等于_____。

16. 已知 x 为实数, 且 $x^2 + \frac{1}{x^2} = 3$, 则 $x^3 + \frac{1}{x^3}$ 的值是_____。

17. 已知 n 为正整数, 若 $\frac{n^2+3n-10}{n^2+6n-16}$ 是一个既约分数, 那么这个分数的值等于_____。

18. 如图4, 在 $\triangle ABC$ 中, $AC=2$, $BC=4$, $\angle ACB=60^\circ$, 将 $\triangle ABC$ 折叠, 使点 B 和点 C 重合, 折痕为 DE , 则 $\triangle AEC$ 的面积是_____。

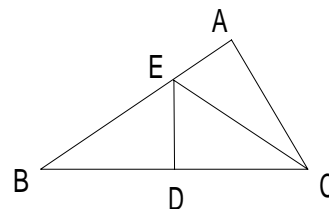


图4

19. 已知非负实数 a 、 b 、 c 满足条件: $3a+2b+c=4$, $2a+b+3c=5$, 设 $S=5a+4b+7c$ 的最大值为 m , 最小值为 n , 则 $n-m$ 等于_____。

20. 设 a 、 b 、 c 、 d 为正整数, 且 $a^7=b^6$, $c^3=d^2$, $c-a=17$, 则 $d-b$ 等于_____。

三. 解答题:

21. 已知实数 a, b 满足条件 $|a - b| = \frac{b}{a} < 1$, 化简代数式 $(\frac{1}{a} - \frac{1}{b})\sqrt{(a - b - 1)^2}$, 将结果表

示成只含有字母 a 的形式。

22. 如图 5, 正方形 $ABCD$ 中, $AB = \sqrt{3}$, 点 E, F 分别在 BC, CD 上, 且 $\angle BAE = 30^\circ$, $\angle DAF = 15^\circ$, 求 $\triangle AEF$ 的面积。

23. 将编号为 1, 2, 3, 4, 5 的五个小球放入编号为 1, 2, 3, 4, 5 的五个盒子中, 每个盒子只放入一个,

一共有多少种不同的放法?

若编号为 1 的球恰好放在了 1 号盒子中, 共有多少种不同的放法?

若至少有一个球放入了同号的盒子中(即对号放入), 共有多少种不同的放法?

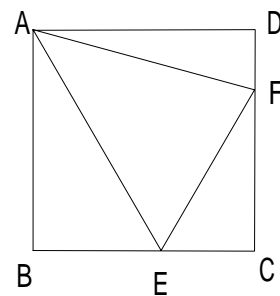


图 5