

第十二届“希望杯”全国数学邀请赛 初二 第2试

一. 选择题 (每小题 5 分, 共 50 分) 以下每题的四个结论中, 仅有一个是正确的, 请将表示正确答案的英文字母填在每题后面的圆括号内。

1. 化简代数式 $\sqrt{3+2\sqrt{2}} + \sqrt{3-2\sqrt{2}}$ 的结果是 ()

A. 3 B. $1+\sqrt{2}$ C. $2+\sqrt{2}$ D. $2\sqrt{2}$

2. 已知多项式 $ax^3 + bx^2 + cx + d$ 除以 $x-1$ 时, 所得的余数是 1, 除以 $x-2$ 时所得的余数是 3, 那么多项式 $ax^3 + bx^2 + cx + d$ 除以 $(x-1)(x-2)$ 时, 所得的余式是 ()

A. $2x-1$ B. $2x+1$ C. $x+1$ D. $x-1$

3. 已知 $a < 1$ 且 $|\frac{a-b}{a+b}| = a$, 那么 ()

A. $ab < 0$ B. $ab > 0$ C. $ab \leq 0$ D. $a+b < 0$

4. 若 $|a| < |c|$, $b = \frac{a+c}{2}$, $|b| < 2|a|$, $S_1 = |\frac{a-b}{c}|$, $S_2 = |\frac{b-c}{a}|$, $S_3 = |\frac{a-c}{b}|$, 则

S_1 、 S_2 、 S_3 的大小关系是 ()

A. $S_1 < S_2 < S_3$ B. $S_1 > S_2 > S_3$

C. $S_1 < S_3 < S_2$ D. $S_1 > S_3 > S_2$

5. 若一个三角形的一个外角的平分线平行于三角形的一条边, 则此三角形肯定是 ()

A. 直角三角形 B. 等边三角形

C. 等腰三角形 D. 等腰直角三角形

6. 若 $\triangle ABC$ 的三边长是 a 、 b 、 c , 且满足 $a^4 = b^4 + c^4 - b^2c^2$, $b^4 = c^4 + a^4 - a^2c^2$, $c^4 = a^4 + b^4 - a^2b^2$, 则 $\triangle ABC$ 是 ()

A. 钝角三角形 B. 直角三角形

C. 等腰直角三角形 D. 等边三角形

7. 平面内有 n 条直线 ($n \geq 2$), 这 n 条直线两两相交, 最多可以得到 a 个交点, 最少可以得到 b 个交点, 则 $a+b$ 的值是 ()

A. $n(n-1)$ B. $n^2 - n + 1$ C. $\frac{n^2 - n}{2}$ D. $\frac{n^2 - n + 2}{2}$

8. In fig. 1, let $\triangle ABC$ be an equilateral triangle, D and E be points on edges AB and AC respectively, F be intersection of segments BE and CD, and $\angle BFC = 120^\circ$, then the magnitude relation between AD and CE is ()

A. $AD > CE$ B. $AD < CE$ C. $AD = CE$ D. indefinite

(英汉词典: equilateral 等边的; intersection 交点; magnitude 大小, 量; indefinite 不确定的)

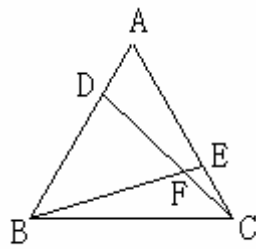


Fig. 1

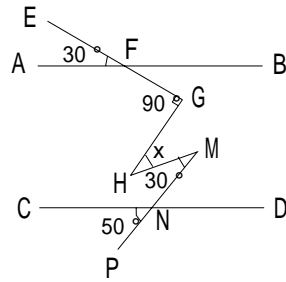


图2

9. 已知两个不同的质数 p, q 满足下列关系：
 $p^2 - 2001p + m = 0, q^2 - 2001q + m = 0$, m 是适当的整数，那么 $p^2 + q^2$ 的数值是 ()

- A. 4004006 B. 3996005 C. 3996003 D. 4004004

10. 小张上周工作 a 小时，每小时的工资为 b 元，本周他的工作时间比上周减少 10%，而每小时的工资数额增加 10%，则他本周的工资总额与上周的工资总额相比 ()

- A. 增加 1% B. 减少 1% C. 增加 1.5% D. 减少 1.5%

二. 填空题 (每小题 6 分, 共 60 分)

11. 化简： $\frac{\sqrt{2} + \sqrt{5} - \sqrt{3}}{2\sqrt{30} - 6\sqrt{2} + 4\sqrt{3}}$ 的结果是_____。

12. 已知 p, q 为实数, 且 $q > 3$, 满足 $p^2q + 12p - 12 \leq 3p^2 + 4pq - 4q$, 那么 $\frac{p-2}{q-3}$ 的值等于_____。

13. 无理数 $(1 + \sqrt{2})^4$ 的整数部分是_____。

14. 设 a, b, c 均为不小于 3 的实数, 则 $\sqrt{a-2} + \sqrt{b+1} + |1 - \sqrt{c-1}|$ 的最小值是_____。

15. 如图 2, 直线 $AB \parallel CD$, $\angle EFA = 30^\circ$, $\angle FGH = 90^\circ$, $\angle HMN = 30^\circ$, $\angle CNP = 50^\circ$, 则 $\angle GHM$ 的大小是_____。

16. 代数式 $\sqrt{x^2 + 4} + \sqrt{(12-x)^2 + 9}$ 的最小值是_____。

17. 有大小两个杯子, 大杯中盛满 48 升纯酒精, 第一次倒出一小杯纯酒精后, 用水加满大杯, 第二次又倒出一小杯混合溶液, 再用水加满大杯, 这时大杯中还剩余 27 升纯酒精, 那么小杯的容积是_____。

18. If p and q are unequal primes, m and n are unequal positive integers satisfying $m^2 - pm + q = 0$ and $n^2 - pn + q = 0$, then the value of $p + q$ is _____。

(英汉词典: prime 质数)

19. 如图 3, $Rt\triangle ABC$ 中, $\angle C = 90^\circ$, $\angle A = 30^\circ$, 点 D, E 分别在 AB, AC 上, 且 $DE \perp AB$, 若 DE 将 $\triangle ABC$ 分成面积相等的两部分, 那么线段 CE 与 AE 的长度的比是_____。

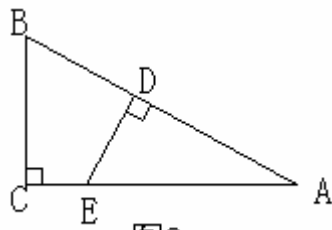


图3

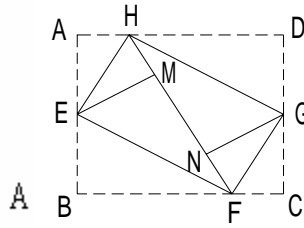


图4

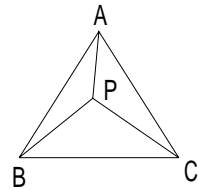


图5

20. 如图4, 将矩形 $ABCD$ 的四个角向内折起, 恰好拼成一个既无缝隙又无重叠的四边形 $EFGH$, 若 $EH = 3$, $EF = 4$, 那么线段 AD 与 AB 的比等于_____。

三. 解答题 (21、22 题各 13 分, 23 题 14 分, 共 40 分) 要求: 写出推算过程

21. 六个排球队参加小组循环赛, 取前 4 名参加第二阶段比赛, 每赛一场, 胜队得一分, 负队不得分, 且没有平局, 结果有 3 个队并列第一名, 一个队得第四名, 他们得到了小组出线权, 请写出各队得分的情况, 并说明理由。

22. 从甲站到乙站共有 800 千米, 开始 400 千米是平路, 接着 300 千米是上坡路, 余下的是下坡路, 已知火车在上坡路、平路、下坡路上的速度的比是 3:4:5,

(1) 若火车在平路上的速度是 80 千米/小时, 那么它从甲站到乙站所用的时间比从乙站到甲站所用的时间多多少小时?

(2) 若要求火车来回所用的时间相同, 那么火车从甲站到乙站在平路上的速度与乙站到甲站在平路上的速度的比是多少?

23. 如图5, 等边 $\triangle ABC$ 的边长 $a = \sqrt{25 + 12\sqrt{3}}$, 点 P 是 $\triangle ABC$ 内的一点, 且 $PA^2 + PB^2 = PC^2$, 若 $PC = 5$, 求 PA 、 PB 的长。