

第十五届“希望杯”全国数学邀请赛

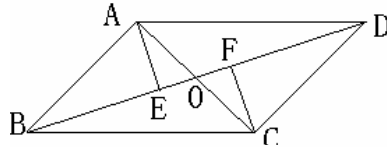
初二 第2试

一、选择题（每小题5分，共50分）

- 方程 $|x+1| + |x-3| = 4$ 的整数解有 ()
 (A) 2个 (B) 3个 (C) 5个 (D) 无穷多个
- 若等式 $\frac{m}{x+3} - \frac{n}{x-3} = \frac{8x}{x^2-9}$ 对任意的 $x (x \neq \pm 3)$ 恒成立, 则 $mn =$ ()
 (A) 8 (B) -8 (C) 16 (D) -16
- 若 $x > z, y > z$, 则下列各式中一定成立的是 ()
 (A) $x+y > 4z$ (B) $x+y > 3z$ (C) $x+y > 2z$ (D) $x+y > z$
- 规定 $[a]$ 表示不超过 a 的最大整数, 当 $x = -1$ 时, 代数式 $2mx^3 - 3nx + 6$ 值为 16, 则 $[\frac{2}{3}m - n] =$ ()
 (A) -4 (B) -3 (C) 3 (D) 4

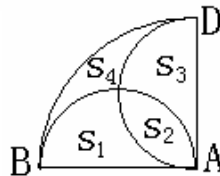
5. 如图 1, 在 ABCD 中, AC 与 BD 相交于 O, AE ⊥ BD 于 E, CF ⊥ BD 于 F, 那么图中的全等三角形共有 ()

- (A) 5对 (B) 6对 (C) 7对 (D) 8对



6. 如图 2, 在直角扇形 ABC 内, 分别以 AB 和 AC 为直径作半圆, 两条半圆弧相交于点 D, 整个图形被分成 S_1, S_2, S_3, S_4 四部分, 则 S_2 和 S_4 的大小关系是 ()

- (A) $S_2 < S_4$ (B) $S_2 = S_4$ (C) $S_2 > S_4$ (D) 无法确定



7. Given m is a real number, and $|1-m| = |m| + 1$, simplify an

algebraic expression, then $\sqrt{m^2 - 2m + 1} =$ ()

- (A) $|m| - 1$ (B) $-|m| + 1$ (C) $m - 1$ (D) $-m + 1$

(英汉小词典 simplify: 化简; algebraic expression: 代数式)

8. 二(1)班共有 35 名学生, 其中 $\frac{1}{2}$ 的男生和 $\frac{1}{3}$ 的女生骑自行车上学, 那么该班骑自行车上学的学生的人数最少是 ()

- (A) 9 (B) 10 (C) 11 (D) 12

9. 李编辑昨天按时间顺序先后收到 A、B、C、D、E 共 5 封电子邮件, 如果他每

次都是首先回复最新收到的一封电子邮件，那么在下列顺序

BAECD

CEDBA

ACBED

DCABE

中，李编辑可能回复的邮件顺序是()

(A) 和 (B) 和 (C) 和 (D) 和

10. 有 A、B、C 三把刻度尺，它们的刻度都是从 0 到 30 个单位（单位长度各不相同），设三把尺子的 0 刻度和 30 刻度处到尺子边缘的长度可以忽略不计，现用其中的一把尺子量度另两把尺子的长度。已知用 C 尺量度，得 A 尺比 B 尺长 6 个单位；用 A 尺量度，得 B 尺比 C 尺长 10 个单位；则用 B 尺量度，A 尺比 C 尺()

(A) 长 15 个单位 (B) 短 15 个单位 (C) 长 5 个单位 (D) 短 5 个单位

二、填空题（每小题 5 分，共 50 分。含两个空的小题，前空 3 分，后空 2 分。）

11. 若方程 $|1002x - 1002^2| = 1002^3$ 的根分别是 x_1 和 x_2 ，则 $x_1 + x_2 =$ _____

12. 分解因式： $a^4 + 2a^3b + 3a^2b^2 + 2ab^3 + b^4 =$ _____

13. 对于任意的自然数 n ，有 $f(n) = \frac{1}{\sqrt[3]{n^2 + 2n + 1} + \sqrt[3]{n^2 - 1} + \sqrt[3]{n^2 - 2n + 1}}$ ，则

$f(1) + f(3) + f(5) + \dots + f(999) =$ _____

14. $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6$ ，都是正数，且 $\frac{x_2x_3x_4x_5x_6}{x_1} = 1, \frac{x_1x_3x_4x_5x_6}{x_2} = 2,$

$\frac{x_1x_2x_4x_5x_6}{x_3} = 3, \frac{x_1x_2x_3x_5x_6}{x_4} = 4, \frac{x_1x_2x_3x_4x_6}{x_5} = 6, \frac{x_1x_2x_3x_4x_5}{x_6} = 9$ ，则

$x_1x_2x_3x_4x_5x_6 =$ _____

15. (Figure 3) In a trapezoid ABCD, AE = DE, CE AD, CE is a

bisector to BCD, then the ratio of the area of a quadrilateral ABCE to that

of a triangle CDE is _____

(英汉小词典 trapezoid：梯形；bisector：平分线；ratio：比值；quadrilateral：四边形)

16. 已知 a, b, c, d 为正整数，且 $\frac{b}{a} = \frac{4d-7}{c}, \frac{b+1}{a} = \frac{7(d-1)}{c}$ ，则 $\frac{c}{a}$ 的值

是 _____； $\frac{d}{b}$ 的值是 _____。

17. 一个直角三角形的三条边的长均为整数，已知它的一条直角边的长是 18，那么另一条直角边的长有 _____ 种可能，它的最大值是 _____。

18. “神舟”飞船由返回舱、轨道舱和推进舱三个舱组成，已知三个舱中每两个舱的长度和分别为 4859mm、5000mm、5741mm，那么这三个舱中长度最大的是

mm, 长度最小的是_____ mm。

19. 若 $(|x+1| + |x-2|)(|y-2| + |y+1|)(|z-3| + |z+1|) = 36$, 则 $x + 2y + 3z$ 的最大值是_____, 最小值是_____。

20. 图 4 是某电台“市民热线”栏目一周内接到的热线电话的统计图, 其中有关房产城建的热线电话有 30 个, 那么有关环境保护的电话有_____个; 如果每年按 52 周年计算, 每周接到的热线电话的数量相同, 那么“市民热线”一年内接到热线电话有_____个。

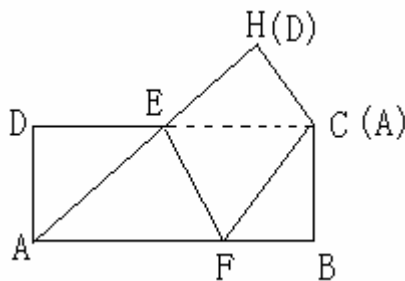


三、解答题 (每题 10 分, 共 30 分) 要求: 写出推算过程。

21. 民航规定: 旅客可以免费携带 a 千克物品, 若超过 a 千克, 则要收取一定的费用, 当携带物品的质量为 b 千克 ($b > a$) 时, 所交费用为 $Q = 10b - 200$ (单位: 元)

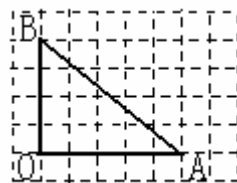
- (1) 小明携带了 35 千克物品, 质量大于 a 千克, 他应交多少费用?
- (2) 小王交了 100 元费用, 他携带了多少千克物品?
- (3) 若收费标准以超重部分的质量 m (千克) 计算, 在保证所交费用 Q 不变的情况下, 试用 m 表示 Q 。

22. 如图 5, 一张矩形纸片 ABCD 的边长分别为 9cm 和 3cm, 把顶点 A 和 C 叠合在一起, 得到折痕 EF。



- (1) 证明四边形 AECF 是菱形.
- (2) 计算折痕 EF 的长.
- (3) 求 $\triangle CEH$ 的面积.

23. 如图 6, 用水平线和竖直线将平面分成若干个边长为 1 的正方形格子, 点 O、A、B 均在正方形格子的顶点 (格点) 处, 其中点 O 与点 A 位于同一水平线上, 相距 a 格, 点 O 与点 B 位于同一竖直线上, 相距 b 格。



- (1) 若 $a = 5, b = 4$, 则 $\triangle OAB$ 中 (不包括三条边) 共有多少个格点?
- (2) 若 a, b 互质, 则在线段 AB 上 (不包括 A、B 两点) 是否有格点? 证明你的结论.
- (3) 若 a, b 互质, 且 $a > b > 8$, $\triangle OAB$ 中 (不包括三条边) 共有 67 个格点, 求 a, b 的值.